MT5002 – Sannolikhetsteori II – (hem-)tentamen

Datum 18 augusti, 2020
Examinator Daniel Ahlberg
Hjälpmendel Kursboken samt annan elektronisk eller fysisk litteratur, beräkningsprogram, etc. Samarbete eller assistens av någon person är ej tillåten.
Bedömning Tentamen består av en basdel och en betygsgrundande del, vilka består av 20 respektive 40 poäng var. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsgrundande delen. Ett antal inlämningsuppgifter under kursens gång har kunnat generera upp till sex bonuspoäng, vilka räknas in i den betygsgrundande delen. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen (bonuspoäng inräknade):

	A	B	C	D	E
Basdel					14
Betygsgrundande del	40	30	20	10	0

Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Försäkran. Dina inlämnade lösningar behöver innehålla följande passage för att bli godkända: *Jag försäkrar på heder och samvete att jag inte fått hjälp av någon annan person för att lösa dessa uppgifter.*

Basdel

Uppgift 1. Låt X vara en multivariat normalfördelad slumpvektor med kovariansmatris som ges av något av följande:

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Motivera i vilka fall en täthetsfunktion existerar. (3p)

Uppgift 2. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende Bernoulli-fördelade variabler med parameter p Låt N vara Poisson-fördelad med parameter λ, samt oberoende av $X_1, X_2, \ldots$. Sätt $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ och beräkna $\mathbb{E}[Y_N]$. (3p)

Uppgift 3. Låt X och Y vara stokastiska variabler med täthetsfunktioner

$$f_X(x) = \frac{1}{4} \quad \text{för } 0 < x \leq 4 \quad \text{och} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2/3 & \text{för } 0 < y \leq 1, \\ 1/6 & \text{för } 1 < y \leq 3. \end{cases}$$

Bestäm de momentgenererande funktionerna för X och Y. (4p)

Uppgift 4. Låt $(X, Y)'$ vara en slumpvektor vars täthetsfunktion ges av

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{48}\big(3x^2y - 6x^2 - y + 2\big) \quad \text{för } 1 \le x \le 2, 2 \le y \le 6.$$

Marginaltätheten för X ges av $f_X(x) = \frac{1}{6}(3x^2 - 1)$ för $1 \le x \le 2$. Bestäm marginaltätheten för Y och avgör om X och Y är oberoende eller ej. (5p)

Uppgift 5. Låt X_n vara en stokastisk variabel vars täthetsfunktion ges av

$$f_n(x) = c_n(1 + e^{-x}) \quad \text{för } x \in [0, n],$$

där $c_n = (n + 1 - e^{-n})^{-1}$ och $n \ge 1$. Visa att $Y_n = X_n/n$ konvergerar i fördelning då $n \to \infty$ mot den likformiga fördelningen på intervallet $[0, 1]$. (5p)

Betygsgrundande del

Uppgift 6. Låt $X = (X_1, X_2, X_3)'$ vara en multivariat normalfördelad slumpvektor med väntevärdesvektor μ och kovariansmatris Λ givna av

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Låt $Y = (X_1, X_2 - X_1, X_1 + X_3 - X_2)'$.

(a) Bestäm fördelningen för Y och avgör om Y har en täthet. (5p)

(b) Beräkna $\mathbb{E}\big[X_1(X_2 - X_1)(X_1 + X_3 - X_2)\big]$. (5p)

Uppgift 7. En viktad sexsidig tärning är konstruerad så att sannolikheten för ett visst utfall är proportionerligt mot antalet ögon (d.v.s. prickar). Låt X ange antalet ögon vid ett kast med tärningen.

(a) Bestäm den sannolikhetsgenererande funktionen för X. (4p)

(b) Låt Y ange ögonsumman utav tre (oberoende) kast med tärningen. Bestäm $\mathbb{P}(Y = 19)$ genom att studera den sannolikhetsgenererande funktionen för Y. (6p)

Uppgift 8. Låt (X, Y) ange koordinaterna för en likformigt fördelad punkt på kvadraten $[0,1] \times [0,1]$, och låt D ange avståndet från punkten (X, Y) till räta linjen mellan $(0,0)$ och $(1,1)$.

(a) Bestäm $\mathbb{P}(D > x)$ för $x \geq 0$. (5p)

(b) Positionera enligt ovanstående förfarande punkter likformigt på $[0,1] \times [0,1]$ oberoende av varandra. Låt $D_1, D_2, \ldots$ ange de avstånd från diagonalen som motsvarande punkter bildar. Visa att

$$\max\{D_1, D_2, \ldots, D_n\} \xrightarrow{p} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{då } n \to \infty. \text{ (5p)}$$

Ledning: Rita en figur över händelsen $\{D > x\}$.

Uppgift 9. Doris och Emir går in på ett kasino. De satsar upprepade gånger pengar på ett spel som med sannolikhet $1/3$ betalar tillbaka insatsen samt lika mycket i vinst, och i annat fall tar insatsen ifrån dem. Emir tycker att de skall satsa enligt en strategi där de i första omgången satsar 1 krona, och för var vinst ökar insatsen med 1 krona, men vid förlust åter sänker insatsen tillbaka till 1 krona. Doris föredrar att de satsar 1 krona i samtliga spel.

(a) Låt N ange antalet omgångar tills dess att första förlusten inträffar. Beräkna förväntad utdelning (d.v.s. kapitalförändring) under de N första omgångarna vid spel med Emirs strategi. (5p)

(b) Låt Z_n ange kapitalförändringen under n spel med Emirs strategi. Låt N_k ange antalet omgångar tills de förlorat k spel. Visa att Z_{N_k}/N_k konvergerar i sannolikhet då $k \to \infty$ och bestäm gränsvärdet. (5p)

Förtydligande: Enligt Emirs strategi fortsätter de efter första förlusten att öka insatsen vid vinst, och återgår till 1 krona i insats efter varje förlust. Spelets olika omgångar kan antas vara oberoende av varandra.