Stockholms universitet, Matematiska institutionen

Tentamen i MT7027, Riskmodeller och reservsättning inom sakförsäkring, 30 april 2021, 8:00–14:00.

Examinator: Filip Lindskog, lindskog@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: Lösningar till uppgifterna ska göras självständigt utan någon form av kommunikation med annan person. Alla hjälpmedel är tillåtna.

Återlämning: meddelas via kursforum.

Argument och beräkningar ska vara tydliga och lätta att följa.

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Uppgift 0

(Obligatorisk uppgift) Försäkrar du att de lösningar du lämnar in gjorts av dig utan hjälp av eller kommunikation med annan person?

Uppgift 1

Betrakta den totala skadekostnaden $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ för en försäkringsprodukt där $N \sim \mathrm{Pois}(1000)$ är oberoende av följden $X_1, X_2, \dots$ av oberoende och likafördelade skadebelopp. Antag att N anger antalet olyckor. Antag att varje olycka leder till ett skadebelopp som är 0 med sannolikhet 0.3, $N(20, 5^2)$-fördelat med sannolikhet 0.6, samt $N(80, 10^2)$-fördelat med sannolikhet 0.1. Antag att försäkringsbolaget tecknat en återförsäkring av typen XL-skydd med undre brytpunkt 40 och ingen övre brytpunkt. Bestäm approximativt (utan datorsimulering) priset för XL-skyddet om det beräknas som väntevärdet plus en standardavvikelse för återförsäkringsbolagets totala skadekostnad. (10 p)

Uppgift 2

Betrakta Tabell 1 med element som betecknar kumulativa utbetalade belopp för ett visst skadeår. Låt $\mathcal{D} = \{C_{i,k} : i + k \leq 7\}$ beteckna data som är observerbar. Låt

$$R = C_{3,5} - C_{3,4} + C_{4,5} - C_{4,3} + C_{5,5} - C_{5,2} + C_{6,5} - C_{6,1}$$

beteckna utestående skadebetalningar från skador under skadeår $3 - 6$ och låt $\widehat{R}$ vara en prediktion av denna storhet baserad på $\mathcal{D}$. Betrakta storheterna

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSEP}_{\mathcal{D}}(R, \widehat{R}) &= \mathrm{E}[(R - \widehat{R})^2 \mid \mathcal{D}], \\
\mathrm{MSEP}(R, \widehat{R}) &= \mathrm{E}[(R - \widehat{R})^2], \\
\mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(R) &= \mathrm{E}[(R - \mathrm{E}[R \mid \mathcal{D}])^2 \mid \mathcal{D}], \\
\mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(\widehat{R}) &= \mathrm{E}[(\widehat{R} - \mathrm{E}[\widehat{R} \mid \mathcal{D}])^2 \mid \mathcal{D}].
\end{aligned}$$

(a) En av olikheterna $\mathrm{MSEP}_{\mathcal{D}}(R, \widehat{R}) \leq \mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(R)$ och $\mathrm{MSEP}_{\mathcal{D}}(R, \widehat{R}) \geq \mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(R)$ gäller: bevisa den. (4 p)

(b) En av olikheterna $\mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(R) \leq \mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(\widehat{R})$ och $\mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(R) \geq \mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(\widehat{R})$ gäller: bevisa den. (3 p)

(c) Bevisa eller motbevisa följande likheter: $\mathrm{E}[\mathrm{MSEP}_{\mathcal{D}}(R, \widehat{R})] = \mathrm{MSEP}(R, \widehat{R})$ och $\mathrm{E}[\mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(R)] = \mathrm{Var}(R)$. (3 p)

Uppgift 3

Betrakta Tabell 1 med element som betecknar kumulativa utbetalade belopp för ett visst skadeår. Antag att det finns positiva konstanter $f_1, \dots, f_4$ och $\sigma_1^2, \dots, \sigma_4^2$ så att

$$\mathrm{E}[C_{i,k+1} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,k}] = f_k C_{i,k},$$
$$\mathrm{Var}(C_{i,k+1} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \sigma_k^2 C_{i,k}^2$$

och att $(C_{i,1}, \dots, C_{i,5})$ och $(C_{j,1}, \dots, C_{j,5})$ är oberoende då $i \neq j$. Låt $\mathcal{D} = \{C_{i,k} : i + k \leq 7\}$ beteckna data som är observerbar.
Bestäm en lämplig skattning $\widehat{f_3}$ av f_3, dvs ett uttryck i elementen i $\mathcal{D}$, och motivera varför den är lämplig. (10 p)

	1	2	3	4	5
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$	$C_{1,5}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	$C_{2,4}$	$C_{2,5}$
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$	$C_{3,4}$	$\mathbf{C_{3,5}}$
4	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$	$C_{4,3}$	$\mathbf{C_{4,4}}$	$\mathbf{C_{4,5}}$
5	$C_{5,1}$	$C_{5,2}$	$\mathbf{C_{5,3}}$	$\mathbf{C_{5,4}}$	$\mathbf{C_{5,5}}$
6	$C_{6,1}$	$\mathbf{C_{6,2}}$	$\mathbf{C_{6,3}}$	$\mathbf{C_{6,4}}$	$\mathbf{C_{6,5}}$

Table 1: Kumulativa utbetalade belopp. För $i+k > 7$ är $\mathbf{C_{i,k}}$ ännu inte observerbar.

Uppgift 4

Försäkringsbolagen Sakbolaget1 och Sakbolaget2 har varsin försäkringsprodukt med finansiella resultat (premieinkomst minus skadekostnader) i slutet av året som modelleras som stokastiska variabler S_1 och S_2. Bägge bolagen önskar proportionell återförsäkring där andelar p_1 och p_2 betecknar andelarna av premieinkomster och skadekostnader som respektive försäkringsbolag behåller. Den kontinuerligt sammansatta 1-årsräntan är r. Sakbolaget1, Sakbolaget2 och det gemensamma återförsäkringsbolaget (utan andra kunder) avgör om uppläggen ska accepteras baserat på riskmåttet $\mathrm{ES}_{0.2}$ (Expected Shortfall). Visa att om både Sakbolaget1 och Sakbolaget2 accepterar upplägget så kommer även återförsäkringsbolaget acceptera upplägget. (10 p)

Uppgift 5

Antag att skulden till försäkringstagarna för ett försäkringsbolag svarar mot ett kassaflöde vars kumulativa belopp per skadeår visas i Tabell 2. Elementen $C_{i,k}$ är observerade för $i + k \leq 7$, observeras i slutet av detta år för $i + k = 8$, osv. Antag även att utbetalningar som svarar mot olika skadeår är oberoende och att utvecklingsårsdynamiken ges av

$$C_{i,1} = f_0 + \sigma_0 Z_{i,1}, \quad C_{i,k+1} = f_k C_{i,k} + \sigma_k Z_{i,k+1}, \quad k = 1, 2,$$

där alla $Z_{i,k}$ är oberoende och $N(0,1)$-fördelade. Antag att den nuvarande kontinuerligt sammansatta räntan är r för alla löptider och att denna ränta i slutet av året

är ofördelad. Antag slutligen att värdet av försäkringsbolagets skuldkassaflöde till försäkringstagarna ges av summan av de betingade väntevärdena för de framtida kassaflödena, betingat på informationen som är tillgänglig vid värderingstillfället, diskonterade till värderingstillfället enligt räntorna vid värderingstillfället.
Beräkna kapitalkravet baserat på riskmåttet $\mathrm{VaR}_{0.005}$ applicerat på $-X$ där X betecknar skadeutbetalningar under året plus värdet av kvarvarande skuld i slutet av året. Kapitalkravet ska ges som ett uttryck i okända parametrar, observerade skadebetalningar samt fördelningsfunktionen för $N(0,1)$. (10 p)

	1	2	3
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$
4	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$	$C_{4,3}$
5	$C_{5,1}$	$C_{5,2}$	$\mathbf{C_{5,3}}$
6	$C_{6,1}$	$\mathbf{C_{6,2}}$	$\mathbf{C_{6,3}}$

Table 2: Kumulativa utbetalade belopp. För $i+k>7$ är $\mathbf{C_{i,k}}$ ännu inte observerbar.

Uppgift 1

Sannolikheten att en $N(20, 5^2)$-fördelad variabel antar ett värde > 40 är densamma som att en $N(0, 1)$ variabel antar ett värde > 4 vilket är en försumbar sannolikhet. På samma sätt är sannolikheten att en $N(80, 10^2)$-fördelad variabel antar ett värde < 40 försumbar. Återförsäkringsbolagets totala skadekostnad är därför (approximativt)

$$R = \sum_{k=1}^{N} \max(X_k - 40, 0) \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{k=1}^{M} Z_k,$$

där $Z_k \sim N(40, 10^2)$, $Z_1, Z_2, \ldots$ oberoende, och oberoende av $M \sim \mathrm{Pois}(100)$ (uttunning av en Poissonvariabel).

$$\mathrm{E}[R] = 100 \cdot 40, \mathrm{Var}(R) = \mathrm{Var}(M)\,\mathrm{E}[Z]^2 + \mathrm{E}[M]\,\mathrm{Var}(Z) = 100 \cdot (40^2 + 10^2),$$

vilket ger premien $4000 + 10\sqrt{1700} \approx 4412$.

Uppgift 2

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSEP}_{\mathcal{D}}(R, \widehat{R}) &= \mathrm{E}[(R - \widehat{R})^2 \mid \mathcal{D}] \\
&= \mathrm{E}[(R - \mathrm{E}[R \mid \mathcal{D}] + \mathrm{E}[R \mid \mathcal{D}] - \widehat{R})^2 \mid \mathcal{D}] \\
&= \mathrm{E}[(R - \mathrm{E}[R \mid \mathcal{D}])^2 \mid \mathcal{D}] + \mathrm{E}[(\mathrm{E}[R \mid \mathcal{D}] - \widehat{R})^2 \mid \mathcal{D}] \\
&\quad + 2\,\mathrm{E}[(\mathrm{E}[R \mid \mathcal{D}] - \widehat{R})(R - \mathrm{E}[R \mid \mathcal{D}]) \mid \mathcal{D}] \\
&= \mathrm{E}[(R - \mathrm{E}[R \mid \mathcal{D}])^2 \mid \mathcal{D}] + (\mathrm{E}[R \mid \mathcal{D}] - \widehat{R})^2 \\
&\quad + 2(\mathrm{E}[R \mid \mathcal{D}] - \widehat{R})\,\mathrm{E}[R - \mathrm{E}[R \mid \mathcal{D}] \mid \mathcal{D}] \\
&= \mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(R) + (\mathrm{E}[R \mid \mathcal{D}] - \widehat{R})^2 \\
&\geq \mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(R)
\end{aligned}$$

(b) Eftersom $\mathrm{E}[\widehat{R} \mid \mathcal{D}] = \widehat{R}$ är $\mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(\widehat{R}) = 0$, dvs

$$\mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(R) \geq \mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(\widehat{R})$$

(c)

$$\begin{gathered}
\mathrm{E}[\mathrm{MSEP}_{\mathcal{D}}(R, \widehat{R})] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[(R - \widehat{R})^2 \mid \mathcal{D}]] = \mathrm{E}[(R - \widehat{R})^2] = \mathrm{MSEP}(R, \widehat{R}), \\
\mathrm{Var}(R) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(R)] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[R \mid \mathcal{D}]) \geq \mathrm{E}[\mathrm{Var}_{\mathcal{D}}(R)]
\end{gathered}$$

Uppgift 3

Notera att

$$\begin{aligned}
C_{i,k+1} &= \mathrm{E}[C_{i,k+1} \mid C_{i,1}, \ldots, C_{i,k}] \\
&\qquad + \mathrm{Var}(C_{i,k+1} \mid C_{i,1}, \ldots, C_{i,k})^{1/2} \frac{C_{i,k+1} - \mathrm{E}[C_{i,k+1} \mid C_{i,1}, \ldots, C_{i,k}]}{\mathrm{Var}(C_{i,k+1} \mid C_{i,1}, \ldots, C_{i,k})^{1/2}} \\
&\quad = C_{i,k} f_k + \sigma_k C_{i,k} e_{i,k+1},
\end{aligned}$$

där

$$\mathrm{E}[e_{i,k+1} \mid C_{i,1},\dots,C_{i,k}] = 0, \quad \mathrm{Var}(e_{i,k+1} \mid C_{i,1},\dots,C_{i,k}) = 1.$$

Specifikt gäller att

$$\begin{bmatrix} C_{1,4} \\ C_{2,4} \\ C_{3,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1,3} \\ C_{2,3} \\ C_{3,3} \end{bmatrix} f_3 + \sigma_3 \begin{bmatrix} C_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & C_{2,3} & 0 \\ 0 & 0 & C_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,4} \\ e_{2,4} \\ e_{3,4} \end{bmatrix},$$

Detta är en regressionsekvation på formen

$$\widetilde{Y} = \widetilde{A}\beta + \sigma\widetilde{D}e$$

som, med $Y := \widetilde{D}^{-1}\widetilde{Y}$ and $A := \widetilde{D}^{-1}\widetilde{A}$, kan skrivas på standardform

$$Y = A\beta + \sigma e$$

Minsta kvadratskattaren av β är

$$\begin{aligned} \widehat{\beta} &= (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}Y \\ &= (\{\widetilde{D}^{-1}\widetilde{A}\}^{\mathrm{T}}\widetilde{D}^{-1}\widetilde{A})^{-1}\{\widetilde{D}^{-1}\widetilde{A}\}^{\mathrm{T}}\widetilde{D}^{-1}\widetilde{Y} \\ &= (\widetilde{A}^{\mathrm{T}}(\widetilde{D}^2)^{-1}\widetilde{A})^{-1}\widetilde{A}^{\mathrm{T}}(\widetilde{D}^2)^{-1}\widetilde{Y}. \end{aligned}$$

Detta ger

$$\widehat{f}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1/C_{1,3} & 1/C_{2,3} & 1/C_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,4} \\ C_{2,4} \\ C_{3,4} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\left(\frac{C_{1,4}}{C_{1,3}} + \frac{C_{2,4}}{C_{2,3}} + \frac{C_{3,4}}{C_{3,3}}\right)$$

Uppgift 4

Sakbolaget1 accepterar upplägget om

$$\mathrm{ES}_{0.2}(p_1S_1) \le 0 \Leftrightarrow p_1\,\mathrm{ES}_{0.2}(S_1) \le 0 \Leftrightarrow \mathrm{ES}_{0.2}(S_1) \le 0$$

och på samma sätt $\mathrm{ES}_{0.2}(S_2) \le 0$ för Sakbolaget2. På samma sätt fås att återförsäkringsbolaget accepterar upplägget om $\mathrm{ES}_{0.2}((1-p_1)S_1 + (1-p_2)S_2) \le 0$. Notera att, pga subadditivitet och positiv homogenitet,

$$\begin{aligned} \mathrm{ES}_{0.2}((1-p_1)S_1 + (1-p_2)S_2) &\le \mathrm{ES}_{0.2}((1-p_1)S_1) + \mathrm{ES}_{0.2}((1-p_2)S_2) \\ &= (1-p_1)\,\mathrm{ES}_{0.2}(S_1) + (1-p_2)\,\mathrm{ES}_{0.2}(S_2) \end{aligned}$$

från vilket följer att $\mathrm{ES}_{0.2}(S_1) \le 0$ och $\mathrm{ES}_{0.2}(S_2) \le 0$ tillsammans medför att $\mathrm{ES}_{0.2}((1-p_1)S_1 + (1-p_2)S_2) \le 0$.

Uppgift 5

Låt

$$(C_1, C_2) = (I_{5,3} + I_{6,2}, I_{6,3})$$

beteckna kassaflödet som svarar mot skulden till försäkringstagarna, där $I_{5,3} = C_{5,3} - C_{5,2}$, etc. Den stokastiska variabel som ska analyseras är

$$-C_1 - e^{-r}\,\mathrm{E}[C_2 \mid \mathcal{F}_1],$$

där $\mathcal{F}_1$ betecknar (den σ-algebra som svarar mot) den information som finns tillgänglig i slutet av året. Notera att

$$\begin{aligned}
C_1 &= I_{5,3} + I_{6,2} = C_{5,2}(f_2 - 1) + \sigma_2 Z_{5,3} + C_{6,1}(f_1 - 1) + \sigma_1 Z_{6,2},\\
C_2 &= I_{6,3} = C_{6,2}(f_2 - 1) + \sigma_2 Z_{6,3}
\end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}
E[C_2 \mid \mathcal{F}_1] &= \mathrm{E}[I_{6,3} \mid C_{6,1}, I_{6,2}] = \mathrm{E}[C_{6,3} - C_{6,2} \mid C_{6,1}, C_{6,2}]\\
&= (f_2 - 1)C_{6,2} = (f_2 - 1)(f_1 C_{6,1} + \sigma_1 Z_{6,2})
\end{aligned}$$

Alltså fås

$$\begin{aligned}
&\mathrm{VaR}_{0.005}(-C_1 - e^{-r}\,\mathrm{E}[C_2 \mid \mathcal{F}_1])\\
&\quad = e^{-r}\,\mathrm{E}[C_1 + e^{-r}\,\mathrm{E}[C_2 \mid \mathcal{F}_1]] + e^{-r}\,\mathrm{Var}(C_1 + e^{-r}\,\mathrm{E}[C_2 \mid \mathcal{F}_1])^{1/2}\Phi^{-1}(0.995)\\
&\quad = e^{-r}\Big(C_{5,2}(f_2 - 1) + C_{6,1}(f_1 - 1) + e^{-r}(f_2 - 1)f_1 C_{6,1}\Big)\\
&\qquad + e^{-r}\Big(\sigma_2^2 + \sigma_1^2\big(1 + e^{-r}(f_2 - 1)\big)^2\Big)^{1/2}\Phi^{-1}(0.995)
\end{aligned}$$