Stockholms universitet, Institutionen för matematik

Tentamen i MT7027, Riskmodeller och reservsättning inom sakförsäkring, 8 Maj 2019, 9:00–14:00.

Examinator: Filip Lindskog, lindskog@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: 1) Miniräknare från institutionen, 2) Valfri litteratur skriven på papper.

Återlämning: meddelas via kursforum.

Argument och beräkningar ska vara tydliga och lätta att följa. För standardnormalfördelningen gäller: $\Phi^{-1}(0.95) \approx 1.64$, $\Phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$, $\Phi^{-1}(0.995) \approx 2.58$. Om numerisk lösning efterfrågas och du har brist på tid för numeriska beräkningar: visa med matematiska symboler hur uppgiften ska lösas.

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Uppgift 1

Betrakta ett försäkringsbolag med likvida tillångar med marknadsvärdet 2 000 000 idag 1 januari och åtaganden mot försäkringstagare vars värde 31 december har fördelning $N(\mu_L, \sigma_L^2)$ där $\mu_L = 1\,000\,000$ och $\sigma_L = 200\,000$. Antag att en krona investerad i aktiemarknaden har ett värde 31 december med fördelning $N(\mu_A, \sigma_A^2)$ där $\mu_A = 1.3$ och $\sigma_A = 0.5$. Antag att en krona investerad i obligationer har ett värde 31 december med fördelning $N(\mu_R, \sigma_R^2)$ där $\mu_R = 1$ och $\sigma_R = 0.1$. Antag att aktierisk, ränterisk och försäkringsrisk är oberoende. Kan försäkringsbolaget placera allt sitt kapital i aktier och vara solvent enligt solvenskriteriet $\mathrm{VaR}_{0.005}$ med 1-årshorizont? Kan försäkringsbolaget placera allt sitt kapital i obligationer och vara solvent enligt solvenskriteriet $\mathrm{VaR}_{0.005}$ med 1-årshorizont? (10 p)

Uppgift 2

Betrakta ett försäkringsbolag som erbjuder försäkringsprodukten “Torpet” till kunder som kan drabbas av skador på fritidshus. Antag att antalen sålda försäkringar per år under de senaste 15 åren varit ungefär desamma och att antal skador för de åren har stickprovsmedelvärde 100 och stickprovsvarians 200. Antag vidare att skadebeloppen har stickprovsmedelvärde 10 000 kr och stickprovsvarians 49 000 000 kr^2. Ange en lämplig modell för nästa års totala skadebelopp och dess väntevärde och standardavvikelse. (10 p)

Uppgift 3

Betrakta historiska aggregerade utbetalningar för en viss produkt i skadetriangeln (skadetrapezoiden) i Tabell 1. Använd chain-ladder-metoden för att skatta väntevärde och standardavvikelse för den sammanlagda inkrementella utbetalningen under nästa kalenderår från skador som inträffat under skadeår 0-5 givet det som är känt idag. (10 p)

	1	2	3	4	5
0	3487	8203	9831	11540	12060
1	4415	9359	10741	12167	13057
2	4971	9962	10915	11486	$C_{2,5}$
3	3470	8561	9899	$C_{3,4}$	$C_{3,5}$
4	5854	12783	$C_{4,3}$	$C_{4,4}$	$C_{4,5}$
5	6418	$C_{5,2}$	$C_{5,3}$	$C_{5,4}$	$C_{5,5}$

Table 1: Kumulativa utbetalda belopp. För $i+k>6$ är $C_{i,k}$ ännu inte observerbar.

Uppgift 4

Betrakta historiska aggregerade utbetalningar för en viss produkt i en skadetriangel (skadetrapezoid) såsom den i Tabell 1, dvs kumulativa utbetalda belopp $C_{i,k}$ är kända för $i+k \leq 6$ och ännu inte observerbara för $i+k>6$. En aktuarie noterar att en historisk årlig inflation på 5% gör att reservsättningsmetoden fungerar dåligt. Konstruera en inflationsjusterad skadetriangel (skadetrapezoid) baserad på den ursprungliga, dvs beskriv hur de inflationsjusterade kumulativa beloppen $\widetilde{C}_{i,k}$ i dagens penningvärde uttrycks i beloppen $C_{i,k}$. Om inflationsjusteringen görs på historiska data i Tabell 1, vilka värden ska $C_{0,1}=3487$ och $C_{0,3}=9831$ ersättas med? Antag att idag är 1 januari och att betalningar görs 31 december varje år. (10 p)

Uppgift 5

Ett försäkringsbolag har ett totalt skadebelopp för en viss produkt som antas fördelat enligt en sammansatt Poissonfördelning SaPo(λ, F) där antalet skador är Poissonfördelat med parameter $\lambda = 1000$ och skadebeloppen är fördelade enligt en blandad fördelning med fördelningfunktion

$$F(x) = 0.9\Big(1-\Big(1+\frac{x}{1000}\Big)^{-3}\Big) + 0.1\Big(1-\Big(1+\frac{x}{2000}\Big)^{-2}\Big)$$

Ett återförsäkringsbolag erbjuder ett XL-skydd med undre brytpunkt 4000 och ingen övre brytpunkt. Den totala skadekostnaden för återförsäkringsbolaget är då fördelat enligt en sammansatt Poissonfördelning SaPo(μ, G). Bestäm μ och G. (10 p)

Uppgift 1

Om $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ så gäller att, med $Z \sim N(0,1)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{0.005}(X) &= \mathrm{VaR}_{0.005}(\mu + \sigma Z) = F^{-1}_{-d(0,1)(\mu+\sigma Z)}(0.995)\\ &= d(0,1)\big(-\mu + \sigma\Phi^{-1}(0.995)\big),\end{aligned}$$

dvs $\mathrm{VaR}_{0.005}(X) \leq 0$ omm $\mu \geq \sigma\Phi^{-1}(0.995) \approx 2.58 \cdot \sigma$. Här, med $C = 2 \cdot 10^6$ och andelen p i aktier,

$$\begin{aligned}X &= pC(\mu_A + \sigma_A Z_A) + (1-p)C(\mu_A + \sigma_A Z_A) - \mu_L - \sigma_L Z_L\\ &\stackrel{\mathrm{d}}{=} pC\mu_A + (1-p)C\mu_R - \mu_L + \big(p^2C^2\sigma_A^2 + (1-p)^2C^2\sigma_R^2 + \sigma_L^2\big)^{1/2} Z.\end{aligned}$$

Enbart aktier (insolvent):

$$\mu = 1.6 \cdot 10^6, \quad \sigma^2 = 4 \cdot 10^{12} \cdot 0.25 + 4 \cdot 10^{10}, \quad 2.58 \cdot \sigma \approx 2\,631\,094 > \mu$$

Enbart obligationer (solvent):

$$\mu = 10^6, \quad \sigma^2 = 4 \cdot 10^{12} \cdot 0.01 + 4 \cdot 10^{10}, \quad 2.58 \cdot \sigma \approx 576\,905.5 < \mu.$$

Uppgift 2

Sammansatt fördelning:

$$\begin{aligned}S &= \sum_{k=1}^{N} X_k, \quad N \perp (X_1, X_2, \dots), \quad X_1, X_2, \dots \text{ olf,}\\ \mathrm{E}[N] &\approx \overline{n} = 100, \quad \mathrm{Var}(N) \approx s_N^2 = 200,\\ \mathrm{E}[X] &\approx \overline{x} = 10^4, \quad \mathrm{Var}(X) \approx s_X^2 = 49 \cdot 10^6.\end{aligned}$$

Det gäller att

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[S] &= \mathrm{E}[N]\,\mathrm{E}[X] \approx 10^6,\\ \mathrm{Var}(S) &= \mathrm{E}[N]\,\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(N)\,\mathrm{E}[X]^2 \approx 49 \cdot 10^8 + 200 \cdot 10^8\end{aligned}$$

dvs standardavvikelse $\approx 15.8 \cdot 10^4$ Möjlig modell: N negativ binomial $\mathrm{NegBin}(\alpha, \beta)$, X lognormal $\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ där (se Johansson s. 32 och s. 49)

$$\begin{aligned}&100 = \alpha/\beta, \quad 200 = \alpha(\beta+1)/\beta^2,\\ &10^4 = e^{\mu+\sigma^2/2}, \quad 49 \cdot 10^6 + 10^8 = e^{2(\mu+\sigma^2)}\end{aligned}$$

Uppgift 3

Nästa års inkrementella betalning ges av

$$X = \big(C_{2,5} - C_{2,4}\big) + \big(C_{3,4} - C_{3,3}\big) + \big(C_{4,3} - C_{4,2}\big) + \big(C_{5,2} - C_{5,1}\big)$$

och

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X \mid \mathcal{F}_0] &= (f_4 - 1)C_{2,4} + (f_3 - 1)C_{3,3} + (f_2 - 1)C_{4,2} + (f_1 - 1)C_{5,1},\\ \mathrm{Var}(X \mid \mathcal{F}_0) &= \sigma_4^2 C_{2,4} + \sigma_3^2 C_{3,3} + \sigma_2^2 C_{4,2} + \sigma_1^2 C_{5,1}.\end{aligned}$$

Parameterskattningar ges av

$$\widehat{f}_1 = \frac{C_{0,2}+C_{1,2}+C_{2,2}+C_{3,2}+C_{4,2}}{C_{0,1}+C_{1,1}+C_{2,1}+C_{3,1}+C_{4,1}}, \quad \widehat{f}_2 = \frac{C_{0,3}+C_{1,3}+C_{2,3}+C_{3,3}}{C_{0,2}+C_{1,2}+C_{2,2}+C_{3,2}},$$
$$\widehat{f}_3 = \frac{C_{0,4}+C_{1,4}+C_{2,4}}{C_{0,3}+C_{1,3}+C_{2,3}}, \quad \widehat{f}_4 = \frac{C_{0,5}+C_{1,5}}{C_{0,4}+C_{1,4}}$$

$\widehat{f}_1 = 2.201559$, $\widehat{f}_2 = 1.146903$, $\widehat{f}_3 = 1.117699$, $\widehat{f}_4 = 1.059476$, och

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{4} C_{i,1}\Big(\frac{C_{i,2}}{C_{i,1}} - \widehat{f}_1\Big)^2, \quad \widehat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{3} C_{i,2}\Big(\frac{C_{i,3}}{C_{i,2}} - \widehat{f}_2\Big)^2,$$
$$\widehat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} C_{i,3}\Big(\frac{C_{i,4}}{C_{i,3}} - \widehat{f}_3\Big)^2, \quad \widehat{\sigma}_4^2 = \sum_{i=0}^{1} C_{i,4}\Big(\frac{C_{i,5}}{C_{i,4}} - \widehat{f}_4\Big)^2$$

$\widehat{\sigma}_1 = 11.72078$, $\widehat{\sigma}_2 = 4.030006$, $\widehat{\sigma}_3 = 6.327915$, $\widehat{\sigma}_4 = 2.161611$. Detta ger $\mathrm{E}[X] \approx 11437.72$ och $\mathrm{Var}(X) \approx 1539342 = 1240.702^2$.

Uppgift 4

Skapa skadetriangel med inkrementella betalningar. Multiplicera inkrementella betalningar t år tillbaka med 1.05^t. Summera dessa radvis för att skapa inflationsjusterade kumulativa betalningar per skadeår.

	1	2	3	4	5
0	3487	4716	1628	1709	520
1	4415	4944	1382	1426	890
2	4971	4991	953	571	$I_{2,5}$
3	3470	5091	1338	$I_{3,4}$	$I_{3,5}$
4	5854	6929	$I_{4,3}$	$I_{4,4}$	$I_{4,5}$
5	6418	$I_{5,2}$	$I_{5,3}$	$I_{5,4}$	$I_{5,5}$

Table 2: Inkrementella utbetalda belopp. För $i+k > 6$ är $I_{i,k}$ ännu inte observerbar.

	1	2	3	4	5
0	4450.394	5732.327	1884.614	1884.173	546
1	5366.460	5723.298	1523.655	1497.300	890
2	5754.554	5502.578	1000.650	571	$\widetilde{I}_{2,5}$
3	3825.675	5345.550	1338	$\widetilde{I}_{3,4}$	$\widetilde{I}_{3,5}$
4	6146.700	6929	$\widetilde{I}_{4,3}$	$\widetilde{I}_{4,4}$	$\widetilde{I}_{4,5}$
5	6418	$\widetilde{I}_{5,2}$	$\widetilde{I}_{5,3}$	$\widetilde{I}_{5,4}$	$\widetilde{I}_{5,5}$

Table 3: Inkrementella justerade utbetalda belopp. För $i+k > 6$ är $\widetilde{I}_{i,k}$ ännu inte observerbar.

	1	2	3	4	5
0	4450.394	10182.721	12067.33	13951.51	14497.51
1	5366.460	11089.758	12613.41	14110.71	15000.71
2	5754.554	11257.131	12257.78	12828.78	$\widetilde{C}_{2,5}$
3	3825.675	9171.225	10509.23	$\widetilde{C}_{3,4}$	$\widetilde{C}_{3,5}$
4	6146.700	13075.700	$\widetilde{C}_{4,3}$	$\widetilde{C}_{4,4}$	$\widetilde{C}_{4,5}$
5	6418.000	$\widetilde{C}_{5,2}$	$\widetilde{C}_{5,3}$	$\widetilde{C}_{5,4}$	$\widetilde{C}_{5,5}$

Table 4: Kumulativa justerade utbetalda belopp. För $i + k > 6$ är $\widetilde{C}_{i,k}$ ännu inte observerbar.

Uppgift 5

$$S = \sum_{k=1}^{N} \big(I_k X_k + (1 - I_k) Y_k\big), \quad S_1 \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{k=1}^{N_1} X_k, \quad S_2 \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{k=1}^{N_2} Y_k, \quad S \overset{\mathrm{d}}{=} S_1 + S_2,$$

där $I_1, I_2, \ldots$ oberoende Be(p), $N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, $N_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda p)$, $N_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda(1-p))$, N, N_1, N_2 är oberoende och oberoende av $I_k, X_k.Y_k$ alla k.

$$\mathrm{P}(X_k - K > x \mid X_k > K) = \Big(1 + \frac{x}{1000 + K}\Big)^{-3},$$
$$\mathrm{P}(Y_k - K > x \mid Y_k > K) = \Big(1 + \frac{x}{2000 + K}\Big)^{-2}.$$

Dvs

$$\begin{aligned} R &= \sum_{k=1}^{N} \max\big(I_k X_k + (1 - I_k) Y_k - 4000, 0\big) \\ &\overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{k=1}^{M_1} Z_k + \sum_{k=1}^{M_2} U_k \\ &\overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{k=1}^{M} \big(J_k Z_k + (1 - J_k) U_k\big), \end{aligned}$$

där $J_1, J_2, \ldots$ oberoende Be(q), $M \sim \mathrm{Po}(\mu)$, $M_1 \sim \mathrm{Po}(\mu q)$, $M_2 \sim \mathrm{Po}(\mu(1-q))$, M, M_1, M_2 är oberoende och oberoende av $J_k, Z_k.U_k$ alla k.

$$\mu q = \lambda p 5^{-3}, \quad \mu(1 - q) = \lambda(1 - p) 3^{-2}$$

vilket ger

$$\mu = \lambda\big(p5^{-3} + (1 - p)3^{-2}\big) \approx 18.31111, \quad q = \frac{p5^{-3}}{p5^{-3} + (1 - p)3^{-2}} \approx 0.3932039$$

och

$$G(x) = q\Big(1 - \Big(1 + \frac{x}{5000}\Big)^{-3}\Big) + (1 - q)\Big(1 - \Big(1 + \frac{x}{6000}\Big)^{-2}\Big)$$