Stockholms universitet, Institutionen för matematik

Tentamen i MT7027, Riskmodeller och reservsättning inom sakförsäkring, 22 april 2020, 9:00–17:00.

Examinator: Filip Lindskog, lindskog@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: Lösningar till uppgifterna ska göras självständigt utan någon form av kommunikation med annan person. Alla hjälpmedel är tillåtna.

Återlämning: meddelas via kursforum.

Argument och beräkningar ska vara tydliga och lätta att följa. Om numerisk lösning efterfrågas och du har brist på tid för numeriska beräkningar: visa med matematiska symboler hur uppgiften ska lösas.

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Uppgift 0

(Obligatorisk uppgift) Försäkrar du att de lösningar du lämnar in gjorts av dig utan hjälp av eller kommunikation med annan person?

Uppgift 1

Låt den totala skadekostnaden (i enheten 10^8 SEK) för kommande året för ett försäkringsbolag ha fördelningsfunktion

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{6}\right)^{-4}, \quad x > 0.$$

Antag att försäkringsbolaget kan köpa ett SL-skydd med nivån 5 och att priset för SL-skyddet är 120% av den förväntade skadekostnaden för återförsäkringsbolaget. Bestäm fördelningsfunktion för den totala kostnaden (skadekostnad och återförsäkringskostnad) för försäkringsbolaget om det köper SL-skyddet. Illustrera i en figur hur tätheten (som kan approximeras av ett histogram genom simulering) för totala kostnaden ändras vid köp av SL-skyddet. (10 p)

Uppgift 2

Ett försäkringsbolag vill analysera lönsamheten för en ny produkt som planeras att erbjudas nästa år. Låt p beteckna premien för ett 1-årigt försäkringskontrakt och antag att ett sådant kontrakt ger upphov till en stokastisk skadekostnad X. Antag att försäkringsbolaget säljer ett Poissonfördelat antal $N \sim \text{Pois}(\lambda)$ 1-åriga försäkringskontrakt och att skadekostnaden för olika kontrakt är oberoende och likafördelade. Bestäm korrelationskoefficienten $\text{Cor}(I, U)$ mellan försäkringsbolagets sammanlagda premieintäkter I och skadekostnader U. (10 p)

Uppgift 3

Betrakta Tabell 1 med element som betecknar rapporterade dödsfall pga av viss sjukdom under de senaste 6 dagarna. De faktiska antalen dödsfall de senaste 4 dagarna är inte kända pga rapporteringsfördröjningar. $N_{-6,5}$ och $N_{-5,5}$ betecknar fastställda antal dödsfall för dagarna -6 och -5 (dvs för 6 resp. 5 dagar sedan). Tex $N_{-3,3}$ betecknar antalet dödsfall som inträffat för 3 dagar sedan, dvs under dag -3, och som rapporterats till och med igår, dvs till och med dag -1.

(a) Bestäm en prediktor, baserad på chain-ladder-metoden och uttryckt i observerad data, för antalet dödsfall som inträffade för 2 dagar sedan. (5 p)

(b) Bestäm standardfelet (kvadratroten av skattning av medelkvadratfelet) för prediktorn i (a) uttryckt i observerad data. (5 p)

	1	2	3	4	5
-6	$N_{-6,1}$	$N_{-6,2}$	$N_{-6,3}$	$N_{-6,4}$	$N_{-6,5}$
-5	$N_{-5,1}$	$N_{-5,2}$	$N_{-5,3}$	$N_{-5,4}$	$N_{-5,5}$
-4	$N_{-4,1}$	$N_{-4,2}$	$N_{-4,3}$	$N_{-4,4}$	$\mathbf{N_{-4,5}}$
-3	$N_{-3,1}$	$N_{-3,2}$	$N_{-3,3}$	$\mathbf{N_{-3,4}}$	$\mathbf{N_{-3,5}}$
-2	$N_{-2,1}$	$N_{-2,2}$	$\mathbf{N_{-2,3}}$	$\mathbf{N_{-2,4}}$	$\mathbf{N_{-2,5}}$
-1	$N_{-1,1}$	$\mathbf{N_{-1,2}}$	$\mathbf{N_{-1,3}}$	$\mathbf{N_{-1,4}}$	$\mathbf{N_{-1,5}}$

Table 1: Kumulativa rapporterade dödsfall. För $i + k > 0$ är $\mathbf{N_{i,k}}$ ännu inte observerbar.

Uppgift 4

Enligt Solvens 2 är ett försäkringsbolag solvent om $\mathrm{VaR}_{0.005}(A - L) \leq 0$ där A och L betecknar värdet på bolagets tillgångar och skulder om ett år (kassaflöden under året antas ske vid årets slut och ingår i A eller L). Antag att $A - L = f(X, Y, Z)$ där f är en deriverbar funktion och X, Y, Z har en simultan normalfördelning med medelvärden μ_X, μ_Y, μ_Z, standardavvikelser $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ och korrelationskoefficienter $\rho_{X,Y}, \rho_{X,Z}, \rho_{Y,Z}$. Approximera f med en linjär funktion och ge ett explicit uttryck som approximerar $\mathrm{VaR}_{0.005}(A-L)$ utryckt i angivna storheter, en diskonteringsfaktor och kvantilfunktionen för standard-normal-fördelningen. (10 p)

Uppgift 5

Betrakta följande modell (fördelning) för skadebeloppet X:

$$\mathrm{P}(X \leq x) = p\Big(1 - e^{-c_1 x^{\tau_1}}\Big) + (1-p)\Big(1 - e^{-c_2 x^{\tau_2}}\Big), \quad x > 0,$$

där $p = 0.2$, $c_1 = c_2 = 0.01$, $\tau_1 = 0.5$, $\tau_2 = 3$. Låt $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ vara oberoende och fördelade som X. Finn x som approximativt löser

$$\mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_{10} > x) = 0.001.$$

(10 p)

Uppgift 1

Låt S beteckna totala skadebeloppet utan SL-skydd. Efter SL-skydd med återförsäkringspremie p:

$$G(x) = \mathrm{P}(p + \min(S,5) \le x) = \begin{cases} 0, & x < p, \\ 1 - \left(1 + \frac{x-p}{6}\right)^{-4}, & p \le x < 5 + p, \\ 1, & x \ge 5 + p, \end{cases}$$

där

$$\begin{aligned} p &= 1.2 \times \mathrm{E}[\max(S-5,0)] = 1.2 \times \mathrm{E}[\max(S-5,0) \mid S > 5]\,\mathrm{P}(S>5) \\ &= 1.2 \times \frac{6+5}{4-1} \times \left(1 + \frac{5}{6}\right)^{-4} \approx 0.39 \end{aligned}$$

Täthetsfunktionen utan SL-skydd är

$$f(x) = \frac{4}{6}\left(1 + \frac{x}{6}\right)^{-5}, \quad x > 0,$$

och med SL-skydd (formellt ingen täthet eftersom den svarar mot blandning av absolutkontinuerlig fördelning och punktmassa):

$$g(x) = \begin{cases} f(x-p), & x < 5 + p, \\ +\infty, & x = 5 + p. \end{cases}$$

Uppgift 2

Intäkter I och utgifter U modelleras enligt:

$$I = Np, \quad U = \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

Det gäller att $\mathrm{E}[I] = \mathrm{E}[N]p$ och $\mathrm{E}[U] = \mathrm{E}[N]\,\mathrm{E}[X]$. Det gäller att $\mathrm{Var}(I) = \mathrm{Var}(N)p^2 = \mathrm{E}[N]p^2$ och $\mathrm{Var}(U) = \mathrm{E}[N]\,\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(N)\,\mathrm{E}[X]^2 = \mathrm{E}[N]\,\mathrm{E}[X^2]$. Det gäller även att

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(I,U) &= \mathrm{E}[IU] - \mathrm{E}[I]\,\mathrm{E}[U] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[IU \mid N]] - \mathrm{E}[I]\,\mathrm{E}[U] \\ &= p\,\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[N^2] - p\,\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[N]^2 = p\,\mathrm{E}[X]\,\mathrm{Var}(N) \\ &= p\,\mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[N]. \end{aligned}$$

Alltså fås

$$\mathrm{Cor}(I,U) = \frac{\mathrm{Cov}(I,U)}{\sqrt{\mathrm{Var}(I)\,\mathrm{Var}(U)}} = \frac{\mathrm{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{E}[X^2]}}$$

Uppgift 3

(a)

$$\widehat{N}_{-2,5} = \widehat{f}_4\widehat{f}_3\widehat{f}_2 N_{-2,2}, \quad \widehat{f}_4 = \frac{N_{-6,5} + N_{-5,5}}{N_{-6,4} + N_{-5,4}}, \quad \widehat{f}_3 = \frac{N_{-6,4} + N_{-5,4} + N_{-4,4}}{N_{-6,3} + N_{-5,3} + N_{-4,3}},$$

$$\widehat{f}_2 = \frac{N_{-6,3} + N_{-5,3} + N_{-4,3} + N_{-3,3}}{N_{-6,2} + N_{-5,2} + N_{-4,2} + N_{-3,2}}$$

(b) Standardfelet som söks är kvadratroten av

$$\widehat{\mathrm{msep}}(\widehat{N}_{-2,5}) = \widehat{N}^2_{-2,5} \sum_{k=2}^{4} \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\widehat{f}_k^2} \Big(\frac{1}{\widehat{N}_{-2,k}} + \frac{1}{\sum_{j=-6}^{-k} N_{j,k}} \Big)$$

där $\widehat{N}_{-2,2} = N_{-2,2}$, $\widehat{N}_{-2,3} = \widehat{f}_2 N_{-2,2}$, $\widehat{N}_{-2,4} = \widehat{f}_3 \widehat{f}_2 N_{-2,2}$ och

$$\widehat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=-6}^{-3} N_{i,2} \Big(\frac{N_{i,3}}{N_{i,2}} - \widehat{f}_2 \Big)^2, \quad \widehat{\sigma}_3^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=-6}^{-4} N_{i,3} \Big(\frac{N_{i,4}}{N_{i,3}} - \widehat{f}_3 \Big)^2,$$
$$\widehat{\sigma}_4^2 = \sum_{i=-6}^{-5} N_{i,4} \Big(\frac{N_{i,5}}{N_{i,4}} - \widehat{f}_4 \Big)^2$$

Uppgift 4

$\mathrm{VaR}_{0.005}(A - L) = d(0,1) F^{-1}_{-f(X,Y,Z)}(0.995)$ och vi approximerar

$$\begin{aligned} f(X,Y,Z) = f(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z) & \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z)(X - \mu_X) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z)(Y - \mu_Y) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z)(Z - \mu_Z). \end{aligned}$$

Notera att $X - \mu_X \stackrel{d}{=} \sigma_X U$ för en standardnormalfördelad U. På samma sätt för Y och Z. Alltså approximerar vi

$$-f(X,Y,Z) \approx a + bU + cV + dW$$

där U, V, Z är oberoende och standard normal och

$$a = -f(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z),\ b = -\frac{\partial f}{\partial x}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z)\sigma_X,$$
$$c = -\frac{\partial f}{\partial y}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z)\sigma_Y,\ d = -\frac{\partial f}{\partial z}(\mu_X, \mu_Y, \mu_Z)\sigma_Z.$$

Alltså approximeras $\mathrm{VaR}_{0.005}(A - L)$ av

$$d(0,1)\Big(a + \sqrt{b^2 + c^2 + d^2 + 2bc\rho_{X,Y} + 2bd\rho_{X,Z} + 2cd\rho_{Y,Z}}\,\Phi^{-1}(0.995) \Big)$$

Uppgift 5

För stora x approximeras $\mathrm{P}(X > x)$ (tungsvansad Weibull ty $\tau_1 \in (0,1)$ blandad med lättsvansad Weibull) av $pe^{-c_1 x^{\tau_1}}$ eftersom

$$\lim_{x \to \infty} \frac{pe^{-c_1 x^{\tau_1}}}{\mathrm{P}(X > x)} = 1.$$

Eftersom tungsvansad Weibull är en subexponentiell fördelning är även blandningen med lättsvansad Weibull subexponentiell. Alltså gäller att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_{10} > x)}{\mathrm{P}(X > x)} = 10,$$

dvs

$$\mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_{10} > x) \approx 10pe^{-c_1 x^{\tau_1}}.$$

Sätter vi högerledet $= 0.001$ och löser ut x fås

$$x = \left(-\frac{1}{c_1} \log\left(\frac{0.001}{10p}\right)\right)^{1/\tau_1} \approx 577737$$