Stockholms universitet, Matematiska institutionen

Tentamen i MT7027, Riskmodeller och reservsättning inom sakförsäkring, 16 mars 2021, 8:00–14:00.

Examinator: Filip Lindskog, lindskog@math.su.se

Tillåtna hjälpmedel: Lösningar till uppgifterna ska göras självständigt utan någon form av kommunikation med annan person. Alla hjälpmedel är tillåtna.

Återlämning: meddelas via kursforum.

Argument och beräkningar ska vara tydliga och lätta att följa.

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Uppgift 0

(Obligatorisk uppgift) Försäkrar du att de lösningar du lämnar in gjorts av dig utan hjälp av eller kommunikation med annan person?

Uppgift 1

Antag att ett år har två vinterkvartal och två sommarkvartal, att skadekostnader för olika kvartal är oberoende, att skadekostnader för olika vinterkvartal är likafördelade och att skadekostnader för olika sommarkvartal är likafördelade. Betrakta historisk skadekostnadsdata 60 och 80 (miljoner SEK) från två vinterkvartal och 20 och 30 (miljoner SEK) från två sommarkvartal. Genom ickeparametrisk bootstrap kan ett godtyckligt stort antal fiktiva skadekostnader för det kommande året (två vinterkvartal och två sommarkvartal) skapas och därgenom kan den förväntade skadekostnaden skattas för ett återförsäkringsbolag som erbjuder ett 1-årigt SL-skydd med undre brytpunkt 200 och ingen övre brytpunkt.

Beräkna den förväntade skadekostnaden för återförsäkringsbolagets SL-skydd utifrån bootstrapfördelningen baserad på historisk skadedata enligt ovan. (10 p)

Uppgift 2

Ett försäkringsbolag försäkrar fritidshus i två regioner. Kommande årets skadeantal i de två regionerna betecknas med N_1 och N_2. Låt $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ vara oberoende och Gamma(α_k, β_k)-fördelade för $k = 1, 2, 3$, där Γ_1, Γ_2 betecknar bakomliggande riskdrivare som bara påverkar endera region och där Γ_3 betecknar bakomliggande riskdrivare som påverkar bägge regionerna. Låt N_1 och N_2 vara betingat oberoende givet $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ och låt

$$\mathrm{P}(N_1 = n_1 \mid \Gamma_1 = \gamma_1, \Gamma_2 = \gamma_2, \Gamma_3 = \gamma_3) \sim \mathrm{Pois}(\gamma_1 + \gamma_3),$$
$$\mathrm{P}(N_2 = n_2 \mid \Gamma_1 = \gamma_1, \Gamma_2 = \gamma_2, \Gamma_3 = \gamma_3) \sim \mathrm{Pois}(\gamma_2 + \gamma_3)$$

för alla $n_1, n_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Bestäm väntevärde och varians för $N_1 + N_2$. (10 p)

Uppgift 3

Betrakta Tabell 1 med element som betecknar kumulativa utbetalade belopp för ett visst skadeår. Antag att det finns positiva konstanter $f_1, \dots, f_4$ och $\sigma_1^2, \dots, \sigma_4^2$ så att, för alla relevanta i, k,

$$\mathrm{E}[C_{i,k+1} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,k}] = f_k C_{i,k},$$
$$\mathrm{Var}(C_{i,k+1} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,k}) = \sigma_k^2 C_{i,k}^2$$

och att $(C_{i,1},\dots,C_{i,5})$ och $(C_{j,1},\dots,C_{j,5})$ är oberoende då $i \neq j$. Låt $\mathcal{D} = \{C_{i,k} : i+k \leq 7\}$ beteckna data som är observerbar.
Beräkna $\mathrm{Var}(C_{4,5} \mid \mathcal{D})$, dvs ett uttryck i elementen i $\mathcal{D}$ och okända konstanter f_k och σ_k^2. (10 p)

	1	2	3	4	5
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	$C_{1,4}$	$C_{1,5}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	$C_{2,4}$	$C_{2,5}$
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$	$C_{3,4}$	$\mathbf{C_{3,5}}$
4	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$	$C_{4,3}$	$\mathbf{C_{4,4}}$	$\mathbf{C_{4,5}}$
5	$C_{5,1}$	$C_{5,2}$	$\mathbf{C_{5,3}}$	$\mathbf{C_{5,4}}$	$\mathbf{C_{5,5}}$
6	$C_{6,1}$	$\mathbf{C_{6,2}}$	$\mathbf{C_{6,3}}$	$\mathbf{C_{6,4}}$	$\mathbf{C_{6,5}}$

Table 1: Kumulativa utbetalade belopp. För $i+k>7$ är $\mathbf{C_{i,k}}$ ännu inte observerbar.

Uppgift 4

Försäkringsbolagen Sakbolaget1 och Sakbolaget2 har varsin försäkringsprodukt med finansiella resultat (premieinkomst minus skadekostnader) i slutet av året som modelleras som $X_1 \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ och $X_2 \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. X_1 och X_2 anses simultant normalfördelade med korrelationskoefficient ρ. Bägge bolagen önskar proportionell återförsäkring där andelar p_1 och p_2 betecknar andelarna av premieinkomster och skadekostnader som respektive försäkringsbolag behåller. Den kontinuerligt sammansatta 1-årsräntan är r.
(a) Bestäm så explicit som möjligt nödvändiga och tillräckliga vilkor, i form av tre olikheter, för att bägge försäkringsbolagen samt det gemensamma återförsäkringsbolaget (utan andra kunder) ska acceptera upplägget under förutsättning att riskmåttet $\mathrm{VaR}_{0.1}$ avgör om ett föreslaget upplägg är acceptabelt. (5 p)

(b) Visa att om både Sakbolaget1 och Sakbolaget2 accepterar upplägget så kommer även återförsäkringsbolaget acceptera upplägget. Samtliga bolag avgör vad som är acceptabelt enligt beskrivning i (a)-uppgiften. (5 p)

Uppgift 5

Antag att ett försäkringsbolag har tillgångar i början av året svarande mot en 2-årig nollkupongsobligation med nominellt belopp N. Antag att skulden till försäkringstagarna svarar mot ett kassaflöde vars kumulativa belopp per skadeår visas i Tabell 2. Elementen $C_{i,k}$ är observerade för $i+k \leq 7$, observeras i slutet av detta år för $i+k=8$, osv. Antag även att utbetalningar som svarar mot olika skadeår är oberoende och att utvecklingsårsdynamiken ges av

$$\log(C_{i,k+1}/C_{i,k}) \sim N(\mu_k,\sigma_k^2), \quad k=1,2,3.$$

Antag att den nuvarande kontinuerligt sammansatta räntan är r för alla löptider och att denna ränta i slutet av året är fördelad enligt $N(r,\nu^2)$ och oberoende av utbetalningar till försäkringstagarna. Antag slutligen att värdet av försäkringsbolagets skuldkassaflöde till försäkringstagarna ges av summan av de betingade väntevärdena

för de framtida kassaflödena, betingat på informationen som är tillgänglig vid värderingstillfället, diskonterade till värderingstillfället enligt räntorna vid värderingstillfället. Antag att kunder varken tillkommer eller lämnar försäkringsbolaget och att ingen förvaltning/ombalansering av tillgångar görs under året.
Uttryck tillgångsvärdet i slutet av året minus skadeutbetalningar under året minus värdet av kvarvarande skuld i slutet av året som ett uttryck i okända parametrar, observerade skadebetalningar samt oberoende standardnormalfördelade stokastiska variabler. (10 p)

	1	2	3
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$
4	$C_{4,1}$	$C_{4,2}$	$C_{4,3}$
5	$C_{5,1}$	$C_{5,2}$	$\mathbf{C_{5,3}}$
6	$C_{6,1}$	$\mathbf{C_{6,2}}$	$\mathbf{C_{6,3}}$

Table 2: Kumulativa utbetalade belopp. För $i+k>7$ är $\mathbf{C_{i,k}}$ ännu inte observerbar.

Uppgift 1

För vinterkvartal har paren

$$(60,60),(60,80),(80,60),(80,80)$$

vardera sannolikheten 1/4 att dras (dragning med återläggning). För sommarkvartal har paren

$$(20,20),(20,30),(30,20),(30,30)$$

vardera sannolikheten 1/4 att dras (dragning med återläggning). För ett år har de 16 utfallen

$$(60,60,20,20),(60,60,20,30),(60,60,30,20),\dots,(80,80,30,20),(80,80,30,30)$$

vardera sannolikheten 1/16. Motsvarande 1-åriga skadekostnader är

$$160,170,170,\dots,180,190,190,200,200,210,210,220$$

Endast de 3 sista ger en positiv skadekostnad $\max(s-200,0)$ för återförsäkringsbolaget. Väntevärdet blir

$$\mathrm{E}[\max(S^*-200,0)] = \frac{1}{16}\cdot 10 + \frac{1}{16}\cdot 10 + \frac{1}{16}\cdot 20 = \frac{40}{16} = 2.5$$

Uppgift 2

Om $\Lambda \sim \mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$ gäller att $\mathrm{E}[\Lambda] = \alpha/\beta$ och $\mathrm{Var}(\Lambda) = \alpha/\beta^2$. Om $M \mid \Lambda \sim \mathrm{Pois}(\Lambda)$ gäller att $\mathrm{E}[M] = \mathrm{E}[\Lambda]$ och $\mathrm{Var}(M) = \mathrm{E}[M] + \mathrm{Var}(\Lambda)$. Speciellt gäller att

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[N_1] &= \mathrm{E}[\Gamma_1+\Gamma_3] = \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_3}{\beta_3},\\
\mathrm{E}[N_2] &= \mathrm{E}[\Gamma_2+\Gamma_3] = \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_3}{\beta_3},\\
\mathrm{E}[N_1N_2] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[N_1N_2 \mid \Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3]]\\
&= \mathrm{E}[\mathrm{E}[N_1 \mid \Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3]\,\mathrm{E}[N_2 \mid \Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3]]\\
&= \mathrm{E}[(\Gamma_1+\Gamma_3)(\Gamma_2+\Gamma_3)]\\
&= \mathrm{E}[\Gamma_1]\,\mathrm{E}[\Gamma_2] + \mathrm{E}[\Gamma_1]\,\mathrm{E}[\Gamma_3] + \mathrm{E}[\Gamma_2]\,\mathrm{E}[\Gamma_3] + \mathrm{E}[\Gamma_3^2]\\
&= \mathrm{E}[\Gamma_1]\,\mathrm{E}[\Gamma_2] + \mathrm{E}[\Gamma_1]\,\mathrm{E}[\Gamma_3] + \mathrm{E}[\Gamma_2]\,\mathrm{E}[\Gamma_3] + \mathrm{E}[\Gamma_3]^2 + \mathrm{Var}(\Gamma_3),\\
\mathrm{E}[N_1]\,\mathrm{E}[N_2] &= \mathrm{E}[\Gamma_1]\,\mathrm{E}[\Gamma_2] + \mathrm{E}[\Gamma_1]\,\mathrm{E}[\Gamma_3] + \mathrm{E}[\Gamma_2]\,\mathrm{E}[\Gamma_3] + \mathrm{E}[\Gamma_3]^2.
\end{aligned}$$

Alltså gäller att $\mathrm{Cov}(N_1,N_2) = \mathrm{Var}(\Gamma_3) = \alpha_3/\beta_3^2$. Vidare gäller att

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(N_1) &= \mathrm{E}[N_1] + \mathrm{Var}(\Gamma_1+\Gamma_3)\\
&= \mathrm{E}[\Gamma_1] + \mathrm{E}[\Gamma_3] + \mathrm{Var}(\Gamma_1) + \mathrm{Var}(\Gamma_3)\\
&= \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_3}{\beta_3} + \frac{\alpha_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3}{\beta_3^2},\\
\mathrm{Var}(N_2) &= \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_3}{\beta_3} + \frac{\alpha_2}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_3}{\beta_3^2}.
\end{aligned}$$

Sammanfattningsvis gäller att

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(N_1+N_2) &= \mathrm{Var}(N_1)+\mathrm{Var}(N_2)+2\,\mathrm{Cov}(N_1,N_2)\\ &= \frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}+2\frac{\alpha_3}{\beta_3}+\frac{\alpha_1}{\beta_1^2}+\frac{\alpha_2}{\beta_2^2}+4\frac{\alpha_3}{\beta_3^2}.\end{aligned}$$

Uppgift 3

Variansdekomposition ger

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(C_{4,5}\mid\mathcal{D}) &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(C_{4,5}\mid C_{4,4})\mid\mathcal{D}]+\mathrm{Var}(\mathrm{E}[C_{4,5}\mid C_{4,4}]\mid\mathcal{D})\\ &= \mathrm{E}[\sigma_4^2C_{4,4}^2\mid\mathcal{D}]+\mathrm{Var}(f_4C_{4,4}\mid\mathcal{D})\\ &= \sigma_4^2\big(\mathrm{Var}(C_{4,4}\mid\mathcal{D})+\mathrm{E}[C_{4,4}\mid\mathcal{D}]^2\big)+f_4^2\,\mathrm{Var}(C_{4,4}\mid\mathcal{D})\\ &= (\sigma_4^2+f_4^2)\,\mathrm{Var}(C_{4,4}\mid C_{4,3})+\sigma_4^2\,\mathrm{E}[C_{4,4}\mid C_{4,3}]^2\\ &= (\sigma_4^2+f_4^2)\sigma_3^2C_{4,3}^2+\sigma_4^2f_3^2C_{4,3}^2\\ &= (\sigma_4^2\sigma_3^2+f_4^2\sigma_3^2+\sigma_4^2f_3^2)C_{4,3}^2\end{aligned}$$

Uppgift 4

Sakbolaget1 accepterar upplägget om

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{0.1}(p_1X_1)\le 0 &\Leftrightarrow p_1\,\mathrm{VaR}_{0.1}(\mu_1+\sigma_1Z_1)\le 0\\ &\Leftrightarrow e^{-r}F^{-1}_{-\mu_1+\sigma_1Z_1}(0.9)\le 0\\ &\Leftrightarrow -\mu_1+\sigma_1\Phi^{-1}(0.9)\le 0\\ &\Leftrightarrow \mu_1\ge\sigma_1\Phi^{-1}(0.9)\end{aligned}$$

och på samma sätt $\mu_2\ge\sigma_2\Phi^{-1}(0.9)$ för Sakbolaget2. På samma sätt fås för återförsäkringsbolaget

$$\mathrm{VaR}_{0.1}((1-p_1)X_1+(1-p_2)X_2)\le 0\Leftrightarrow\mu\ge\sigma\Phi^{-1}(0.9)$$

där

$$\begin{aligned}\mu &= \mathrm{E}[(1-p_1)X_1+(1-p_2)X_2]\\ &= (1-p_1)\mu_1+(1-p_2)\mu_2,\\ \sigma^2 &= \mathrm{Var}((1-p_1)X_1+(1-p_2)X_2)\\ &= (1-p_1)^2\sigma_1^2+(1-p_2)^2\sigma_2^2+2(1-p_1)(1-p_2)\rho\sigma_1\sigma_2\\ &\le ((1-p_1)\sigma_1+(1-p_2)\sigma_2)^2\end{aligned}$$

Om både Sakbolaget1 och Sakbolaget2 accepterar upplägget fås

$$\mu=(1-p_1)\mu_1+(1-p_2)\mu_2\ge((1-p_1)\sigma_1+(1-p_2)\sigma_2)\Phi^{-1}(0.9)$$

vilket medför att $\mu\ge\sigma\Phi^{-1}(0.9)$.

Uppgift 5

Låt

$$(C_1,C_2)=(I_{5,3}+I_{6,2},I_{6,3})$$

beteckna kassaflödet som svarar mot skulden till försäkringstagarna, där $I_{5,3} = C_{5,3} - C_{5,2}$, etc. Den för alla löptider gemensamma räntan i slutet av året kan skrivas $r + \nu Z_r$, där $Z_r \sim N(0,1)$. Den stokastiska variabel som ska analyseras är

$$e^{-r+\nu Z_r} N - C_1 - e^{-r+\nu Z_r}\,\mathrm{E}[C_2 \mid \mathcal{F}_1],$$

där $\mathcal{F}_1$ betecknar (den σ-algebra som svarar mot) den information som finns tillgänglig i slutet av året. Utvecklingsårsdynamiken kan uttryckas

$$C_{i,k+1} = C_{i,k} e^{\mu_k + \sigma_k Z_{i,k+1}},$$

där alla $Z_{i,k+1}$ är oberoende och $N(0,1)$. Notera att

$$C_1 = I_{5,3} + I_{6,2} = C_{5,2}(e^{\mu_2+\sigma_2 Z_{5,3}} - 1) + C_{6,1}(e^{\mu_1+\sigma_1 Z_{6,2}} - 1)$$

Notera att

$$C_2 = I_{6,3} = C_{6,2}(e^{\mu_2+\sigma_2 Z_{6,3}} - 1) = (C_{6,1} + I_{6,2})(e^{\mu_2+\sigma_2 Z_{6,3}} - 1)$$

vilket ger

$$\begin{aligned} E[C_2 \mid \mathcal{F}_1] &= \mathrm{E}[I_{6,3} \mid C_{6,1}, I_{6,2}] = (C_{6,1} + I_{6,2})(e^{\mu_1+\sigma_1^2/2} - 1) \\ &= C_{6,1} e^{\mu_1+\sigma_1 Z_{6,2}} (e^{\mu_2+\sigma_2^2/2} - 1) \end{aligned}$$