

Tentamen i Stokastiska processer och simulering I

23 augusti 2021 kl. 9–15

Examinator: Maria Deijfen. Frågor om tentan besvaras per telefon 070-3369790 kl 10-11 samt 13-14.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken samt annan litteratur, beräkningsprogram, etc. Att samarbeta eller ta hjälp av någon annan person är inte tillåtet.

Återlämning: Resultat läggs in i Ladok senast onsdag 1 september.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Försäkran. Dina inlämnade lösningar behöver innehålla ditt namn samt följande passage för att bli godkända: *Jag försäkrar på heder och samvete att jag inte fått hjälp av någon annan person för att lösa dessa uppgifter.*

Basdel

Uppgift 1

På en vårdcentral finns varje dag två, tre eller fyra läkare på plats. Det är lika sannolikt att ha två, tre eller fyra läkare på plats, och varje läkare tar emot ett Poissonfördelat antal patienter med väntevärde 30 patienter per dag (oberoende av hur många läkare som finns på plats). Beräkna väntevärde och varians för antalet patienter som tas emot på vårdcentralen under en viss dag.

Uppgift 2

Agneta tränar en gång om dagen: löpning, cykling eller simning. Om hon har tränat löpning en dag, väljer hon antingen cykling eller simning dagen

efter, med lika stor sannolikhet. Om hon har tränat cykling eller simning en dag, så väljer hon samma träningsform dagen efter med sannolikhet en tredjedel och om hon väljer en annan träningsform väljer hon något av de två andra alternativen med samma sannolikhet.

a) Beskriv Agnetas träning som en Markovkedja och ange övergångsmatrisen för kedjan.

b) Vad är proportionen löpningsdagar respektive cyklingsdagar på lång sikt?

Uppgift 3

Kunder kommer till en affär enligt en Poissonprocess och det kommer i genomsnitt en kund under en 5-minutersperiod.

a) Vad är sannolikheten att det under en 10-minuterperiod kommer mer än tre personer till affären?

b) Vilken fördelning har tiden mellan två successiva kunder i affären?

c) Om affären öppnar kl 10 på morgonen och det sammanlagt har kommit två kunder kl 10.15, vad är sannolikheten att båda kunderna kom innan kl 10.05?

Svårare del

Uppgift 4

Turister anländer till en utsiktsplats enligt en Poissonprocess med intensitet λ personer per minut och stannar på platsen en exponentialfördelad tid med väntevärde $1/\mu$ minuter. Hur många personer som helst kan njuta av utsikten samtidigt. Bestäm fördelningen för antalet personer på platsen efter lång tid och ange det förväntade antalet personer på platsen.

Uppgift 5

En maskin går sönder enligt en Poissonprocess med intensitet λ . Två olika reparatörer konkurrerar om att reparera maskinen. När maskinen går sönder börjar de båda transportera sig till maskinen. Deras transporttider är oberoende exponentialfördelade variabler med väntevärde $1/\nu$ och den som kommer fram först påbörjar genast reparationen. Reparationstiden är sedan exponentialfördelad med väntevärde $1/\mu$. Vi har $\lambda = 10^{-3}$, $\nu = 20 \cdot 10^{-3}$ och $\mu = 10 \cdot 10^{-3} \text{ (h}^{-1}\text{)}$ och alla tider är oberoende av varandra. Beräkna sannolikheten att systemet fungerar efter lång tid.

Uppgift 6

En Markovkedja i diskret tid med tillståndsrum $\{1, 2, 3, 4\}$ har (med tillstånden ordnade i nummerföljd) övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Kedjan startar vid tid 0 i tillstånd 1.

a) Beräkna förväntat antal steg tills kedjan för första gången hamnar i tillstånd 4.

b) Beräkna sannolikheten att kedjan besöker tillstånd 3 någon gång innan den för första gången hamnar i tillstånd 4.

Ledning: Gör om lämpligt/lämpliga tillstånd till absorberande.

Lycka till!