

Lösningar

23 augusti 2021

Uppgift 1

Låt N beteckna antalet läkare som är på plats en viss dag. Då gäller att $P(N = n) = 1/3$ för $n = 2, 3, 4$ och vi får att $\mathbb{E}[N] = 3$ och $\text{Var}(N) = 2/3$. Det totala antalet patienter som vårdcentralen tar emot under dagen ges av $S = \sum_{i=1}^N X_i$ där $\{X_i\}$ är oberoende $\text{Po}(30)$ -variabler. Väntevärdet fås genom $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S|N]]$. Här är $\mathbb{E}[S|N = n] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = n\mathbb{E}[X_i] = 30n$ och alltså $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[30N] = 30\mathbb{E}[N] = 90$. Variansen beräknas genom $\text{Var}(S) = \mathbb{E}[\text{Var}(S|N)] + \text{Var}(\mathbb{E}[S|N])$. Vi har att $\text{Var}(S|N = n) = \text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = 30n$ och alltså $\text{Var}(S) = \mathbb{E}[30N] + \text{Var}(30N) = 30\mathbb{E}[N] + 900\text{Var}(N) = 690$.

Uppgift 2

a) Låt X_n beteckna Agneats träningsform dag n , med $X_n = 1$ för löpträning, $X_n = 2$ för cykling och $X_n = 3$ för simning. Då är $\{X_n\}$ en Markovkedja med övergångsmatris

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

b) Den asymptotiska fördelningen $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ fås som lösning till ekvationssystemet $\pi = \pi\mathbf{P}$ tillsammans med kravet att $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 &= \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 &= \pi_2 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 &= \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1. \end{cases}$$

Man får att $\pi_1 = (1/4, 3/8, 3/8)$, dvs proportionen löpningsdagar är $1/4$ och proportionen cyklingsdagar är $3/8$.

Uppgift 3

Kundflödet beskrivs av en Poissonprocess med intensitet 0.2 kunder /minut. Antalet kunder efter t minuter är alltså $\text{Po}(0.2 \cdot t)$.

a) $P(N(10) > 3) = 1 - P(N(10) \leq 3) = 1 - \frac{19}{3}e^{-2} \approx$

b) $\text{Exp}(0.2)$ (enhet: minuter)

c) Givet att två kunder har kommit under en 15-minutersperiod så är deras ankomsttider oberoende och lika fördelade över perioden. Sannolikheten att de båda ska ha anlänt under den första 5-minutersperioden ges alltså av $(1/3)^2 = 1/9$.

Uppgift 4

När n personer befinner sig på platsen är tiden tills någon lämnar platsen ett minimum av n stycken $\text{Exp}(\mu)$ -variabler, vilket är $\text{Exp}(n\mu)$ -fördelat. Antalet turister på platsen beskrivs alltså av en födelse-döds-process med $\lambda_n = \lambda$ och $\mu_n = n\mu$. Låt $r_0 = 1$ och

$$r_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n}$$

för $n \geq 1$. Förutsatt att $\sum r_n < \infty$ så ges den asymptotiska fördelningen av $p_n = r_n / \sum_{n=0}^{\infty} r_n$. Vi har

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = e^{\lambda/\mu}$$

och gränsfördelningen blir alltså

$$p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} e^{-\lambda/\mu}$$

dvs en $\text{Po}(\lambda/\mu)$ -fördelning med väntevärde λ/μ .

Uppgift 5

Systemet kan beskrivas av en markovkedja i kontinuerlig tid med tillstånd $1:\{\text{maskinen fungerar}\}$, $2:\{\text{trasig, väntar på reparatör}\}$, $3:\{\text{trasig, reparation pågår}\}$.

När maskinen väntar på reparation är tiden tills reparationen inleds ett minimum av två oberoende $\text{Exp}(\nu)$ -variabler, vilket är $\text{Exp}(2\nu)$ -fördelat. Intensitetsmatrisen (där vi skriver intensiteterna med vilka vi rör oss mellan tillstånden utanför diagonalen, och den sammanlagda intensiteten med vilken vi lämnar tillståndet med omvänt tecken på diagonalen) blir alltså

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & -2\nu & 2\nu \\ \mu & 0 & -\mu \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -40 & 40 \\ 10 & 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

Gränsfördelningen $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ bestäms av $\pi\mathbf{Q} = 0$ (balansekvationerna) tillsammans med villkoret att $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, vilket ger $\pi = (\frac{400}{450}, \frac{10}{450}, \frac{40}{450})$. Den sökta sannolikheten ges av $\pi_1 = \frac{400}{450} \approx 0.89$.

Uppgift 6

a) Vi gör om tillstånd 4 till ett absorberande tillstånd. Övergångmatrisen kan då skrivas som

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_T & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

med

$$\mathbb{P}_T = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbb{R} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

Här beskriver $\mathbb{P}_T$ övergångar mellan de transienta tillstånden 1, 2, 3 och $\mathbb{R}$ beskriver övergångar från de transienta tillstånden till det absorberande tillståndet 4. Tiden som processen tillbringar i de transienta tillstånden innan den hamnar i det absorberande tillståndet 4 ges av elementen i matrisen $\mathbb{S} = (\mathbf{1} - \mathbb{P}_T)^{-1}$. Vi får

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 & -0.2 \\ -0.4 & 0.5 & 0 \\ -0.3 & -0.4 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3.51 & 2.11 & 0.88 \\ 2.81 & 3.68 & 0.7 \\ 2.72 & 2.63 & 1.93 \end{bmatrix}.$$

Eftersom kedjan startar i tillstånd 1, så ges det sökta väntevärdet av summan av elementen på rad 1, dvs $3.51 + 2.11 + 0.88 = 6.5$.

b) Vi gör nu om tillstånden 3 och 4 till absorberande tillstånd. Övergångmatrisen kan då skrivas på samma form som ovan med

$$\mathbb{P}_T = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbb{R} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Den sökta sannolikheten svarar mot sannolikheten att kedjan absorberas i tillstånd 3. Absorptionssannolikheterna ges av matrisen

$$(\mathbf{1} - P_T)^{-1}R = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.4 & 0.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.55 \\ 0.36 & 0.64 \end{bmatrix}.$$

Eftersom kedjan startar i tillstånd 1 blir svaret 0.45.