MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLM UNIVERSITET
Avd. Matematik

Lösningsförslag till numerisk analys teoriprov 190220

(1) Sätt ett kryss framför det rätta svaret.
   (a) $2 \cdot 10^{-24}$.
   (b) 10^{-3}
   (c) Inget av ovanstående
   (d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
   (e) stiffness.

(2) Observera att det exakta värdet är $f'(0) = -12$
   (a) Givet $x_0 = -0.5$, $f(x_0) = -1.125$,; $x_1 = 1$, $f(x_1) = -24$; $x_2 = 2$, $f(x_2) = -48$.
   Använd Lagrangeinterpolation fås

$$f'(0) = -1.125\frac{2(0)-1-2}{(-0.5-1)(-0.5-2)}+(-24)\frac{2(0)-(-0.5)-2}{(1-(-0.5))(1-2)}+(-48)\frac{2(0)-(-0.5)-1}{(2-(-0.5))(2-1)} = 0.9-24+9.6 = -13.5$$

   Relativfelet är $|(-12+13.5)/(-12)| = 0.125 = 12.5\%$.
   (b) $f'(0) \approx \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{-24-12}{1-(-1)} = -18$
   Relativfelet är $|(-12+18)/(-12)| = 0.5 = 50\%$.
   (c) (i) är bättre än (ii). Eftersom funktionen är ett fjärdegradspolynom får vi bästa felet (0) om vi interpolerar den med ett polynom av drag 4 och sedan derivera den. Med andra ord jo högre grad en interpolation har desto bättre blir approximationen. Den centrerade differensformeln har noggrannhets ordning $O(h^2)$ men steget i (ii) är stort $h = 1$. Där för kan felet blir ganska stort.

(3) Att $n \times n$-matrisen A är diagonaliserbar och har alla egenvärden mellan $-k$ och 0 (dvs de är reella) medför att systemet kan transformeras till n stycken ekvationen på formen $\dot{z}_i = \lambda_i z_i$, $i = 1, 2, ..., n$ genom en similär transformation för A. Vi vet att för varje ekvation för z_i har Eulersmetod steglängden $h \leq -2/\lambda_i$. Kombinera detta med $\lambda_i \geq -k$ får vi $h_{\max} = 2/k$.

(4) Låt $E_n = I - T_n$. Enligt feluppskattning för trapetsregeln har vi

$$E_n = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(\xi_n), \qquad \text{för något } \xi_n \text{ i intervallet } [0,2]$$

där $a = 0$, $b = 2$ och $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Derivera vi f två gånger fås $f''(x) = \dfrac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}$. Detta ger

$$|f''(x)| \leq |-2+6x^2| \geq |-2-6x^2| \leq 2$$

Insättning av denna uppskattning i E_n ger

$$|E_n| \leq \frac{2h^2}{12} \cdot 2 = \frac{h^2}{3}$$

som ska vara mindre är $5 \cdot 10^{-6}$, dvs $h^2/3 \leq 5 \cdot 10^{-6}$, dvs $h \leq 0.003873$. Men

$$n = 2/h \geq 516.4 \quad \Longrightarrow \quad n \geq 517.$$

så att få den önskade felgränsen.

(5) (a) LU-faktorisering can skrivas på följande sätt

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \beta_2 & 1 & & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & \beta_{n-1} & 1 & \\ & & & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & & & \\ & \alpha_2 & c_2 & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Skriv ut komponentvis

$$\alpha_1 = a_1,\ \beta_k = \frac{b_k}{\alpha_{k-1}},\ \alpha_k = a_k - \beta_k c_{k-1},\ k = 2, 3, ..., n$$

(b) Låt $\delta_k = \det(A_k)$, $k = 1, 2, ..., n$. Då, för $k = 2, ..., n$

$$\delta_k = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k = \delta_{k-1}\alpha_k \overset{(i)}{=} \delta_{k-1}(a_{k-1} - \frac{b_k}{\alpha_{k-1}} c_{k-1}) \overset{(i)}{=} a_k\delta_{k-1} - b_k c_{k-1}\delta_{k-2}$$

där $\delta_0 = 1$.

(c) Nej, när n är större än 21 blir den inte positiv deficit. Detta kan ses på följande sätt. Från (b) har vi

$$\delta_0 = 1, \delta_1 = 2, \delta_k = 2\delta_{k-1} - 1.01^2\delta_{k-2}$$

Eftersom

$$\delta_k = 1.01^k \sin(k+1)\theta / \sin\theta, \quad \text{där } \tan\theta = \sqrt{0.0201} \Longrightarrow \theta = 8.069^\circ$$

(visa detta) och $22\theta < 180^\circ < 23\theta$ har vi det största n lika med 21.

(d) Antag att G har huvudiagonal element $g_1, ..., g_n$ och off-diagonalelement under huvuddiagonalen $h_2, ..., h_n$, jämför $A_n = GG^T$ får vi $g_i = \sqrt{a_i - h_i^2}$ och $h_i = b_i/g_{i-1}$ för $i = i : n$, där$h_0 = 0$. Det har komplexitet $O(n)$.

(6) För (a) och (b) måste vi ha $|\varphi'(p)| \le r < 1$. Jo mindre r är desto snabbare är konvergensen.

1. $\varphi(x) = -\ln x \Longrightarrow |\varphi'(p)| = |\frac{1}{p}| \approx 2$. Så det konvergerar inte utom vi startar $x_0 = p$.
2. $\varphi(x) = e^{-x} \Longrightarrow |\varphi'(p)| = e^{-p} \approx 0.6$. Så den kan användas för lämpligt val av x_0
3. $\varphi(x) = \frac{x+e^{-x}}{2} \Longrightarrow |\varphi'(p)| = \frac{1}{2}|1 - e^{-p}| \approx 0.20$ Den är snabbare än 2 och rekommenderas att använda.

(c) Vi kan försöka med $\varphi(x) = \frac{\beta x + e^{-x}}{\beta+1}$ där β ska bestämmas så att få snabbare konvergens. Derivatan är

$$\varphi'(x) = \frac{\beta - e^{-x}}{\beta+1} \Longrightarrow \varphi'(p) = \frac{\beta - p}{\beta+1}$$

Om vi väljer $\beta \approx p$ så är konvergens mycket snabb.