MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLM UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Yishao Zhou

Tentamensskrivning i
Numerisk analys
Teoriprov
Den 20 februari 2019

OBS! Miniräknare från institutionen är tillåten. Decimalpunkt anges med punkt.
Skrivningen omfattar 6 uppgifter 10 poäng (p) var.
Betygsgänser: A: $p \geq 54$; B: $48 \leq p < 54$; C: $42 \leq p < 48$; D: $36 \leq p < 42$; E: $30 \leq p < 36$;

(1) Sätt ett kryss framför det rätta svaret.

(a) En approximativ lösning till ekvationen $x^2 + e^{x-100} = 2500$ är $x = 50$. Vi gör en iteration med Newton-Raphsons metod för att uppskatta felet i denna lösning. Om $e^{-25} \approx 1.4 \cdot 10^{-11}, e^{-50} \approx 2 \cdot 10^{-22}$ och $e^{-100} \approx 4 \cdot 10^{-44}$ är felet ungefär:

☐ 0.5. ☐ $2 \cdot 10^{-11}$. ☐ $2 \cdot 10^{-22}$. ☐ $2 \cdot 10^{-24}$. ☐ $2 \cdot 10^{-44}$.

(b) Integralen $\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{2} + 2e^{-x}\sin(2x^2)}dx$ har beräknats med trapetsregeln med steglängderna 0.2 och 0.1. Resultatet blev $T(0.2) = 1.6426, T(0.1) = 1.6418$. Vilken steglängd h (ungefär) bör användas i trapetsregeln om vi vill ha ett fel som är mindre än $8 \cdot 10^{-8}$ med minsta möjliga arbete?

☐ 10^{-2} ☐ 10^{-3} ☐ 10^{-4} ☐ 10^{-5} ☐ 10^{-6}

(c) ☐ Låt A vara en $m \times n$-matris där $m \geq n$. Antag att A har full kolonnrang. Vilket av följande är felaktigt? Det Euklidiska konditionstalet är

☐ $\kappa_2(A) = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 / \min_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$

☐ $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ då $m = n$

☐ $\kappa_2^2(A) = \max_i \lambda_i / \min_i \lambda_i$, där λ_i är egenvärden till $A^T A$.

☐ Inget av ovanstående

(d) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1.9 & -0.9 \\ -0.9 & 0.9 \end{pmatrix}$. Iterationen $X_{k+1} = X_k + X_k(I - AX_k)$ går mot

☐ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(e) För $t \geq 0$, $\begin{cases} y_1' = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} y_1 + \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} y_2 \\ y_2' = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} y_1 + \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} y_2 \end{cases}$ med konstanter $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, har den allmänna lösningen $y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, $y_2(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} - C_2 e^{\lambda_2 t}$ där C_1 och C_2 är integrations konstanter. Om systemet integreras med Eulers metod får vi numeriska lösningar på slutenformen $y_{1,n} = C_1(1 + h\lambda_1)^n + C_2(1 + h\lambda_2)^n, y_{2,n} = C_1(1 + h\lambda_1)^n - C_2(1 + h\lambda_2)^n$. Om $|\lambda_2| \gg |\lambda_1|$ så är termen $e^{-\lambda_2 t}$ i den exakta lösningen försumbart liten jämfört med $e^{-\lambda_1 t}$. Men det är tyvärr inte sant för den numeriska lösningen. Om vi exempelvis har $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1000$ måste vi ha $h < 0.002$. Så trots att e^{-1000t} i praktiken inte bidrar till lösningen begränsar faktorn 1000 i exponenten kraftigt steglängden. Detta beteende i numeriska lösningar av differentialekvationer kallas

☐ illa-konditionerat. ☐ stiffness. ☐ numeriskt instabilt. ☐ illa-ställt.

(2) Låt $f(x) = 2x^4 - 6x^3 - 12x - 8$.

(a) Bestäm $f'(0)$ med hjälp av Lagrangeinterpolation baserad på $x_0 = -0.5$, $x_1 = 1$ och $x_2 = 2$. Beräkna relativfelet (i %).

(b) Bestäm $f'(0)$ med en centrerad differens approximation (med fel $O(h^2)$ based på $h = 1$ och jämnt fördelade längd. Beräkna relativfelet (i %).

(c) jämför resultaten i (a) och (b) och förklara varför det ena är bättre än det andra.

(3) Integrera systemet $y' = Ay$, $y(0) = c$ med Eulers metod, där matrisen A är en reell kvadratisk diagonaliserbar matris. Antag vidare att alla egenvärden till A ligger i intervallet $[-k, 0]$, där $k > 0$. Vad är den största steglängden för vilken vektorföljden $y_0, y_1, y_2, \ldots$ är begränsad.

(4) Beräkna $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1+x^2}$ med trapetsregeln T_n. Hur stort n skall väljas så att

$$|I - T_n| \leq 5 \cdot 10^{-6}$$

(5) Låt tridiagonalmatrisen A_n vara

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

(a) Härled en rekursiv formel för LU-faktorisering av A_n så att L har alla daigonalelement lika med 1.

(b) Härled en rekursiv formel för att beräkna $\det(A_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ där A_k är $k \times k$-matrisen av första k rader och k kolonner i A_n.

(c) Är den $n \times n$-matrisen med $a_1 = \ldots = a_n = 2$, $b_2 = \ldots = b_n = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 1.01$ positivt definit för alla n. Om inte bestäm det största n för vilket matrisen är positiv definit. (Ledtråd: Visa att $\delta_k = \det(A_k)$ från (b) är $\delta_k = 1.01^k \sin(k+1)\theta / \sin\theta$, där $\tan\theta = \sqrt{0.0201}$ vilket ger $\theta = 8.069°$)

(d) Bestäm Choleskyfaktorn G för A_n i (c) , dvs $A_n = GG^T$, som har komplexitet $O(n)$.

(6) Vi vill, med iteration, lösa ekvationen $x + \ln x = 0$, som har roten $p \approx 0.5$, och vi ska välja följande iterations formler 1. $x_{n+1} = -\ln x_n$; 2. $x_{n+1} = e^{-x_n}$ 3. $x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}$

(a) Vilken formel/vilka formler kan användas?

(b) Vilken formel bör användas

(c) Ange en ännu bättre formel.

Skrivningsåterlämning: Den 28 februari kl 11.30 i sal 34 hus 5 därefter på studentexpeditionen.