MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLM UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Yishao Zhou

Tentamensskrivning i
Numerisk analys
Teoriprov
Den 18 januari 2019

OBS! Miniräknare från institutionen är tillåten. Decimalpunkt anges med punkt.

Skrivningen omfattar 6 uppgifter 10 poäng (p) var.

Betygsgänser: A: $p \geq 54$; B: $48 \leq p < 54$; C: $42 \leq p < 48$; D: $36 \leq p < 42$; E: $30 \leq p < 36$;

(1) Sätt ett kryss framför det rätta svaret.

(a) I en iterativ beräkning är felgränsen $|\epsilon_n|$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$, begränsad av

$$0.9,\ 0.81,\ 0.66,\ 0.44, 0.19, 0.036, 0.0013, 0.000016, ...$$

För $n \geq 6$ är antalet signifikant decimaler ungefär fördubbelade vid varje iteration. Detta indikerar att metoden är

- [ ] divergent
- [ ] linjärt konvergent
- [ ] bättre än linjärt konvergent
- [ ] kvadratiskt konvergent

(b) Antag att A är en inverterbar 10000×10000-tridiagonalmatris. Om $A = LU$, (LU-faktorisering)

- [ ] är A^{-1} också tridiagonal.
- [ ] har A^{-1} 10^8 nollskilda element medan L och U tillsammans har $3 \cdot 10^4$ nollskilda element
- [ ] har A^{-1} lika många nollskilda element som L och U tillsammans, dvs 10^8.
- [ ] har A^{-1} lika många nollskilda element som L och U tillsammans, dvs $3 \cdot 10^4$

(c)

- [ ] Vid addition och subtraktion skall gränserna för operandernas absoluta fel adderas
- [ ] Vid multiplikation och division skall gränserna för operandernas absoluta fel adderas
- [ ] Vid addition och multiplikation skall gränserna för operandernas absoluta fel adderas
- [ ] Vid subtraktion och division skall gränserna för operandernas absoluta fel adderas

(d) Problemet att bestämma ett m-te gradspolynom Q sådant att $Q(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., m$, har en entydig lösning och att
$f(x) - Q(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_m), \xi \in \text{int}(x, x_0, x_1, ..., x_m)$ är

- [ ] en numerisk integration.
- [ ] en numerisk derivation.
- [ ] ett interpolationsproblem.
- [ ] ett extrapolationsproblem.

(e) Vi har uppgiften att anpassa en linjär funktion $x_0 + x_1(t - c)$ med minsta-kvadratmetoden enligt tabellen

t	1	3	4	6	7
$f(t)$	−2.1	−0.9	−0.6	0.6	0.9

- [ ] Valet av $c = 4$ är olämpligt eftersom problemet blir illa-konditionerat.
- [ ] Valet av $c = 1000$ är olämpligt eftersom problemet blir illa-konditionerat.
- [ ] Valet av $c = 1000$ är bra eftersom problemet blir väl-konditionerat.
- [ ] Inget av ovanstående

(2) Visa att den numeriska integrationsformen

$$\frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)], \qquad \text{där } h=(b-a)/2$$

för beräkning av integralen $\int_a^b f(x)dx$ är exakt om f är ett polynom av grad ≤ 3.

(3) (a) Beräkna $f(0)$ med Newtons interpolationsformel med hjälp av följande tabell

x	0.1	0.2	0.4	0.8
$f(x)$	64.987	62.055	56.074	43.609

(b) Om värdena i tabellen har fel som inte överstiger 1/2 visa att det resulterade fel i $f(0)$ är mindre än 7/2.

(c) Antag att $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots$. Visa att beräkning av $f(0)$ med upprepad Richardsons extrapolation är samma som (a).

(4) Betrakta det linjära systemet

$$\begin{cases} y_1' = -\dfrac{1001}{2}y_1+\dfrac{999}{2}y_2 \\ y_2' = \dfrac{999}{2}y_1-\dfrac{1001}{2}y_2 \end{cases}$$

(a) Visa att den allmänna lösningen är $y_1(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-1000x}$, $y_2(x)=C_1e^{-x}-C_2e^{-1000x}$, där C_1, C_2 är integrations konstanter.

(b) Antag att systemet är integrerad med Eulers metod. Bestäm den sluta formen av denna lösning. Ange villkoret för steglängden h för konvergens mot 0.

(c) Argumentera att Eulers metod är knappt lämplig för lösning av sådant system.

(d) Föreslå en lämplig metod och motivera ditt val.

(5) Antag att $n\times n$-matrisen A är inverterbar. Låt I_n vara $n\times n$-enhetsmatrisen. Visa att matrisföljden $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$, genererad av iterationen $X_{k+1}=X_k+X_k(I-AX_k)$ konvergerar mot matrisen A^{-1} om X_0 uppfyller $AX_0=X_0A$ och $\|I-AX_0\|<1$. Vad är konvergensordning?

Om du inte kan bevisa ovanstående påstående kan du få delpoäng om du drar slutsatsen om konvergensordning genom att beräkna A^{-1} med ovanstående iteration för

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \quad X_0=\begin{pmatrix}1.9 & -0.9\\ -0.9 & 0.9\end{pmatrix}$$

(6) Låt $A=\begin{pmatrix}10 & 7 & 8 & 7\\ 7 & 5 & 6 & 5\\ 8 & 6 & 10 & 9\\ 7 & 5 & 9 & 10\end{pmatrix}$ och $b=\begin{pmatrix}4\\3\\3\\1\end{pmatrix}$. Vid beräkning av lösningen till ekvationssystemet $Ax=b$ är b störd med en vektor δb sådan att $\|\delta b\|_\infty \leq 0.01$.

(a) Ange en övregräns för $\|\delta x\|_\infty$, där δx är den motsvarande störningen i lösningen.

(b) Beräkna konditionstalet $\kappa_\infty(A)$ och jämför detta med kvoten mellan $\|\delta x\|/\|x\|$ och $\|\delta b\|/\|b\|$.

I fall det behövs är $A^{-1}=\begin{pmatrix}25 & -41 & 10 & -6\\ -41 & 68 & -17 & 10\\ 10 & -17 & 5 & -3\\ -6 & 10 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

Skrivningsåterlämning: Den 24 januari kl 11.30 i rum 403 hus 6 därefter på studentexpeditionen.