STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, GA

MT 7012
LÖSNINGAR
25 oktober 2019

Förslag till lösningar

Tentamen i Livförsäkringsmatematik I, 25 oktober 2019

Uppgift 1

a) Fördelningen för $D(x, x+1)$ är en binomialfördelning. Detta under förutsättning att de olika indivdernas återstående livslängder är oberoende samt att alla individer i populationen har samma sannolikhet att avlida under observationsåret. Antagandena är att betrakta som rimliga och vi får därför att

$$D(x, x+1) \sim Bin(n_x, q_x)$$

där q_x är den ettåriga dödsrisken.

b) Den ettåriga dödsrisken definieras som $q_x = P(T_x \leq 1)$ där T_x är den återstående livslängden för en x-årig individ.

Den efterfrågade skattningen ges av

$$\hat{q}_x = \frac{D(x, x+1)}{n_x} = \hat{q}_{50} = \frac{D(50, 51)}{10000} = \frac{16}{10000} = 0,0016.$$

c) Utgående från skattningen i b)-uppgiften ovan kan man visa att $\hat{q_x} \sim as.N(q_x, \sigma^2(\hat{q_x}))$. Vi kan då skapa ett approximativt konfidensintervall för q_x genom

$$I_{q_x} = \left(\hat{q}_x \pm \lambda_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma^2(\hat{q_x})}\right) = \hat{q}_x \cdot \left(1 \pm \frac{\lambda_{1-\alpha/2}}{\sqrt{D(x,x+1)}}\right)$$

där $\sigma^2(\hat{q}_x) = \frac{q_x(1-q_x)}{n_x}$. Om vi nu sätter in de aktuella siffrorna får vi, med $\alpha = 0,95$,

$$I_{q_x} = 0,0016\left(1 \pm \frac{1,96}{\sqrt{D(50,51)}}\right) \approx (0,0016 \pm 0,0008).$$

Den slutliga numeriska beräkningen behöver ej genomföras för att få en godkänd lösning.

Uppgift 2

Vi har att göra med en **uppskjuten temporär livränta**. Från försäkringen betalas det ut 1 krona per år med början efter k år så länge som den försäkrade lever, dock längst i s år. Försäkringsbeloppet betalas med andra ord ut under åldersperioden $(x+k, x+k+s)$ under förutsättningen att individen lever i intervallet.

Vi skall börja med att beräkna värdefunktionen. Inledningsvis gäller att $V(0) = 0$, försäkringen betalas med årspremie i n år och $n \leq k$. Då blir

$$A(t) = \begin{cases} L \cdot \frac{N(x+k)-N(x+k+s)}{D(x+t)} & , \quad 0 < t \leq k \\ L \cdot \frac{N(x+t)-N(x+k+s)}{D(x+t)} & , \quad k < t \leq k+s \\ 0 & , \quad k+s < t \end{cases}$$

och

$$B(t) = \begin{cases} P \cdot \frac{N(x+t)-N(x+n)}{D(x+t)} & , \quad 0 < t \leq n \\ 0 & , \quad n < t \leq k \\ 0 & , \quad k < t \end{cases}$$

vilket gör att vi kan nu skriva värdefunktionen vid durationen t som

$$V(t) = \begin{cases} L \cdot \frac{N(x+k)-N(x+k+s)}{D(x+t)} - P \cdot \frac{N(x+t)-N(x+n)}{D(x+t)} & , 0 < t \leq n \\ L \cdot \frac{N(x+k)-N(x+k+s)}{D(x+t)} & , n < t \leq k \\ L \cdot \frac{N(x+t)-N(x+k+s)}{D(x+t)} & , k < t \leq k+s \\ 0 & , k+s < t. \end{cases}$$

Nu kan vi förhållandevis enkelt härleda Thieles differentialfunktion från genom att multiplicera med $D(x+t)$, derivera med avseende på t och sedan dividera bort faktorn $D(x+t)$. I den här försäkringen visar det sig att premiebetalningstiden och utbetalningstiden är (kan vara) skilda åt. Därför finns ingen durationsperiod där denna process med att härleda differentialekvationen innehåller både P och L. Vi får då

$$V'(t) = \begin{cases} \delta V(t) + P - \mu_{x+t}(0 - V(t)) & , \quad 0 < t \leq n \\ \delta V(t) - \mu_{x+t}(0 - V(t)) & , \quad n < t \leq k \\ \delta V(t) - L - \mu_{x+t}(0 - V(t)) & , \quad k < t \leq k+s \\ 0 & , \quad k+s < t. \end{cases}$$

Uppgift 3

Beviset låter sig enklast göras med hjälp av induktion. Till att börja med ser vi att påståendet är sant för $x = 1$ eftersom $l(1) = 1 - q_0$.

Nästa steg är att anta att påståendet är sant för $x = k$, det vill säga att $l(k) = \prod_{i=0}^{k-1}(1 - q_i)$. Slutligen gäller att visa att då är påståendet också sant för $x = k + 1$. Men eftersom $l(k+1) = l(k)(1 - q_k)$ så är påståendet sant för alla x.

Uppgift 4

Vi har dödlighetsintensiteten given genom $\mu_x = \beta \cdot x, x \geq 0$.

a) Genom relationen

$$l(x) = e^{-\int_0^x \mu_s ds}, x \geq 0.$$

får vi att $l(x) = e^{-\beta x^2/2}, x \geq 0$, vilket alltså är det som efterfrågas.

b) Vidare gäller att $f_x(t) = \frac{l(x+t)}{l(x)} \cdot \mu_{x+t} = \frac{-l'(x+t)}{l(x)}$ vilket, med uttrycket för l(x) insatt, ger

$$f_x(t) = \frac{e^{-\beta(x+t)^2/2}}{e^{-\beta x^2/2}} \cdot \beta \cdot (x+t) =$$
$$= \beta \cdot (x+t) \cdot e^{-\beta(xt+t^2/2)} \to 0, t \to \infty.$$

Detta resultat uppnås eftersom exponentialuttrycket går snabbare mot 0 än det linjära uttrycket i t går mot oändligheten då $t \to \infty$ (och $\beta > 0$).

Uppgift 5

Försäkringen beror på två liv men med ett intuitivt resonemang är formeln för engångspremien relativ enkel att sätta upp.

Till att börja med ska 100 000 kronor betalas ut om Fortuna avlider under de första 5 åren men att Joker lever. Det kapitalvärdet ges av

$$E_1 = 100\ 000 \cdot \left[\frac{D(75)}{D(70)} - \frac{D(75,74)}{D(70,69)}\right]$$

Om nu Fortuna lever efter 5 år så är det kapitalvärdet lika med

$$E_2 = 5\ 000\ \cdot \left[\frac{D(75,74)}{D(70,69)}\right].$$

Den sökta engångspremien blir då $E = E_1 + E_2$ kronor.