STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik, GA

MT 7012
LÖSNINGAR
28 november 2019

Förslag till lösningar

Tentamen i Livförsäkringsmatematik I, 28 november 2019

Uppgift 1

Observera att överlevelsefunktion inte är normerad i den form den är given i uppgiften.

a) Dödlighetsintensiteten ges av

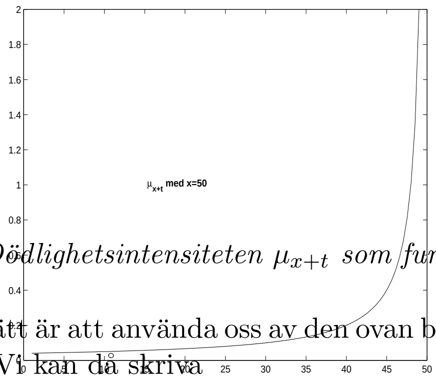
$$\mu_{x+t} = \frac{-l'(x+t)}{l(x+t)}.$$

Eftersom $10^4 \cdot l'(x+t) = -2 \cdot 10^4 \cdot (100 - (x+t))$ får vi att

$$\mu_{x+t} = \frac{2 \cdot (100 - (x+t))}{(100 - (x+t))^2} = \frac{2}{100 - (x+t)},\ 0 \leq t \leq 100 - x.$$

Grafen av dödlighetsintensiteten μ_{x+t} som funktion av t givet x kan nu ritas som i Figur 1. Vi har valt $x = 50$ som exempel.

b) Täthetsfunktionen för T_x, återstående livslängd, kan bestämmas genom att observera att $F_{T_x}(t) = 1 - \frac{l(x+t)}{l(x)}$ (observera att överlevelsefunktionen har normerats) vilket efter derivering med avseende på t ger det sökta svaret.



Figur 1: *Dödlighetsintensiteten μ_{x+t} som funktion av t för x=50.*

Ett annat sätt är att använda oss av den ovan beräknade dödlighetsintensiteten. Vi kan då skriva

$$f_{T_x}(t) = \frac{l(x+t)}{l(x)} \cdot \mu_{x+t} = \frac{2 \cdot (100 - (x+t))}{(100-x)^2}, \; 0 \le t \le 100 - x.$$

c) Slutligen kan den förväntade återstående livslängden $E[T_x] = e_x$ bestämmas genom formeln

$$e_x = \int_0^\infty \frac{l(x+t)}{l(x)} \, dt = \int_0^\infty \frac{(100 - (x+t))^2}{(100-x)^2} \, dt = ... = \frac{100 - x}{3}.$$

Observera att integrationen sker över intervallet $t \in (0, 100 - x)$, det vill säga positiva tillskott till integralen fås enbart för de t-värden som omfattas av intervallet.

Uppgift 2

a) Den kvadratsumma som skall minimeras är

$$Q = \sum_{i=1}^{n} w_{x_i} \cdot (\hat{\mu}_{x_i} - \alpha - \beta e^{\gamma x_i})^2.$$

b) Minimeringen genomförs med γ fixt, det vill säga att man minimerar Q med avseende på α och β för fixt γ. Minimeringen genomförs genom att lösa ekvationerna

$$\frac{dQ}{d\alpha} = 0$$

och

$$\frac{dQ}{d\beta} = 0.$$

Efter förenkling, och med införandet av några hjälpfunktioner (se nedan), får man

$$\hat{\alpha} = \frac{m_{01} - \hat{\beta} m_{10}}{w}$$

och

$$\hat{\beta} = \frac{w m_{11} - m_{10} m_{01}}{w m_{20} - m_{10}^2}$$

där

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_{x_i},$$

$$
\begin{aligned}
m_{10} &= \sum_{i=1}^{n} w_{x_i} e^{\gamma x_i}, \\
m_{01} &= \sum_{i=1}^{n} w_{x_i} \hat{\mu}_{x_i}, \\
m_{20} &= \sum_{i=1}^{n} w_{x_i} e^{2\gamma x_i}, \\
m_{11} &= \sum_{i=1}^{n} w_{x_i} e^{\gamma x_i} \hat{\mu}_{x_i}.
\end{aligned}
$$

Med dessa hjälpberäkningar kan man färdigställa skattningarna som eftersöks.

Uppgift 3

Av definitionen av $X(t)$ framgår att försäkringen betalas med en årspremie. Antag att premiebetalningsperioden är n år.

Vi skall beräkna nuvärdet, och därefter kapitalvärdet, av framtida premier vid durationen t. Låt n vara det antal år som vi betalar en årspremie. Tidpunkten n i försäkringen är alltså vid den durationstidpunkt då premiebetalningsperioden förväntas upphöra. Låt a_0 vara definierad enligt gängse definition i kurslitteraturen. Det gäller att

$$
X(t) = \begin{cases} P \cdot a_0(T_{x+t}) & , \quad 0 < T_{x+t} \leq n - t, \\ P \cdot a_0(n-t) & , \quad n - t < T_{x+t}. \end{cases}
$$

Om vi i ekvationen ovan sätter $t = 0$ får vi nuvärdet vid försäkringens tecknande. Man kan nu genom användande av f_{x+t}, täthetsfunktionen för T_{x+t}, beräkna väntevärdet av $X(t)$, det sökta kapitalvärdet. Vi börjar emellertid med att beräkna integralen

$$
\int_0^{n-t} a_0(s) f_{x+t}(s)\, ds = \int_0^{n-t} a_0(s) \cdot \frac{l(x+t+s)\, \mu_{x+t+s}}{l(x+t)}\, ds =
$$

$$= -\left[a_0(s) \cdot \frac{l(x+t+s)}{l(x+t)}\right]_{s=0}^{s=n-t} + \int_0^{n-t} e^{-\delta(s)} \frac{l(x+t+s)}{l(x+t)}\, ds =$$

$$= -a_0(n-t) \cdot \frac{l(x+n)}{l(x+t)} + \int_0^{n-t} \frac{D(x+s)}{D(x+t)}\, dt =$$

$$= -a_0(n-t) \cdot \frac{l(x+n)}{l(x+t)} + \frac{N(x+t) - N(x+n)}{D(x+t)}.$$

Vi kan då lätt beräkna $E[X(t)]$ genom

$$E[X(t)]/P = \int_0^{n-t} a_0(s) f_{x+t}(s)\, ds + a_0(n-t) \cdot \frac{l(x+n)}{l(x+t)} =$$

$$= -a_0(n-t) \cdot \frac{l(x+n)}{l(x+t)} + \frac{N(x+t) - N(x+n)}{D(x+t)} +$$

$$+ a_0(n-t) \cdot \frac{l(x+n)}{l(x+t)} = \frac{N(x+t) - N(x+n)}{D(x+t)}.$$

Uppgift 4

Vi antar att L och P båda är deriverbara funktioner. I praktiken betyder det att vi inte har några engångsutbetalningar för livsfall och ej heller några engångspremier.

Vi inför

$A(t)$ = kapitalvärdet av försäkringsgivarens framtida förpliktelser enligt försäkringsavtalet vid tidpunkten t.

$B(t)$ = kapitalvärdet av försäkringstagarens framtida förpliktelser enligt försäkringsavtalet vid tidpunkten t.

Vi kan då skriva värdefunktionen, vid durationen t, som $V(t)$, det vill säga

$$V(t) = A(t) - B(t) = \int_t^{\infty} \frac{D(x+u)}{D(x+t)}\, [L'(u) + \mu_{x+u}\, S(u) - P'(u)]\, du.$$

Om vi nu multiplicerar ekvationen med $D(x+t)$ och deriverar får vi, för vänster led (VL),

$$VL = \frac{d[V(t)D(x+t)]}{dt} = V'(t)D(x+t) - V(t)(\mu_{x+t} + \delta)D(x+t)$$

och för höger led (HL),

$$HL = -D(x+t)[L'(t) + \mu_{x+t}S(t) - P'(t)].$$

Om vi nu sätter HL lika med VL och dividerar med $D(x+t)$ får vi följande relation,

$$V'(t) - V(t)(\mu_{x+t} + \delta) = -[L'(t) + \mu_{x+t}S(t) - P'(t)]$$

vilken, efter förenkling, kan skrivas som

$$V'(t) = \delta V(t) + P'(t) - L'(t) - \mu_{x+t}[S(t) - V(t)].$$

Detta är Thieles differentialekvation för en allmän ettlivsförsäkring. Metoden att härleda Thieles differentialekvation kan härmed sammanfattas som

- Multiplicera värdefunktionen $V(t)$ med $D(x+t)$,
- Derivera ekvationen med avseende på t,
- Dividera ekvationen med $D(x+t)$.

Uppgift 5

Denna försäkring kan, precis som en sammansatt kapitalförsäkring för ett liv, delas upp i en dödsfallsdel och en livsfallsdel. I denna försäkring, tvålivsförsäkringen, sker utbetalning vid första död.

Sannolikheten att minst en av de två individerna avlider i durationsintervallet $(t, t+dt)$ kan skrivas som

$$\frac{l(x+t)}{l(x)} \cdot \frac{l(y+t)}{l(y)} \cdot (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) \cdot dt.$$

Kapitalvärdet vid duration 0, av den eventuella utbetalningen av S kronor i intervallet, blir då

$$\begin{aligned} S \cdot e^{-\delta t} \cdot \frac{l(x+t)}{l(x)} \cdot \frac{l(y+t)}{l(y)} \cdot (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) \cdot dt = \\ = S \cdot \frac{D(x+t, y+t)}{D(x,y)} \cdot (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) \cdot dt \end{aligned}$$

Om man nu summerar över alla små durationsintervall får man att försäkringens kapitalvärde av försäkringsgivarens förpliktelser, för dödsfalldelen, är

$$S \cdot \frac{M(x,y) - M(x+m, y+m)}{D(x,y)} = S \cdot \left(1 - \frac{D(x+m, y+m)}{D(x,y)} - \delta \cdot a_2(x, y; m)\right).$$

För livsfallsdelen gäller att sannolikheten att båda individerna lever om m år ges av

$$\frac{l(x+m)}{l(x)} \cdot \frac{l(y+m)}{l(y)}.$$

Kapitalvärdet vid durationen $t = 0$ av utbetalningen S kronor vid duratiuonen $t = m$, om båda individerna lever då, ges av

$$S \cdot e^{-\delta m} \cdot \frac{l(x+m)}{l(x)} \cdot \frac{l(y+m)}{l(y)} = S \cdot \frac{D(x+m, y+m)}{D(x,y)}.$$

Engångspremien fås då, genom att summera dessa två delar till

$$E = P \cdot a_2(x, y; n) = S \cdot (1 - \delta \cdot a_2(x, y; m)) \, .$$