STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 7012
TENTAMEN
28 november 2019

Tentamen i Livförsäkringsmatematik I

28 november 2019 kl. 9–14

Lärare: Gunnar Andersson, gunnar.andersson@ActStrats.com, tel: 0709 390 350.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Återlämning: Tisdagen den 3 december 2019 kl 10.00 - 10.30, sal 321, Matematisk statistik.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är preliminärt 25 poäng av 50 möjliga poäng. Resonemang skall vara klara och tydliga.

Uppgift 1

Låt T_x, den återstående livslängden för en x-årig individ, representeras av överlevelsefunktionen $l(x)$ genom

$$10^4 \cdot l(x) = \begin{cases} (100-x)^2, & , \quad 0 \leq x \leq 100 \\ 0 & , \quad annars \end{cases}$$

a) Bestäm dödlighetsintensiteten μ_{x+t} och rita grafen till μ_{x+t} som funktion av t givet x.

(3 p)

b) Bestäm täthetsfunktionen f_{T_x}.

(3 p)

c) Bestäm förväntad återstående livslängd, e_x.

(4 p)

Uppgift 2

Betrakta en population av försäkrade i olika åldrar. Antag att vi skattar dödlighetsintensiteterna μ_{x_i} för de olika åldrarna med skattningarna $\hat{\mu}_{x_i}$. Till vårt förfogande för skattningarna har vi för varje ålder x_i dels antalet avlidna D_{x_i} och dels risktiden för respektive ålder, R_{x_i}.

En lämplig skattning av dödlighetsintensiteten för åldern x_i är till exempel $\hat{\mu}_{x_i} = \frac{D_{x_i}}{R_{x_i}}$.

Vi önskar utjämna de skattade dödlighetsintensiteterna med hjälp av Makehams formel. Utjämningen skall genomföras med hjälp av den modifierade minimum χ^2-metoden. Antag vidare att vi viktar observationerna med vikterna $\omega_{x_i} = \frac{D_{x_i}}{\hat{\mu}^2_{x_i}}$.

a) Ange den kvadratsumma som skall minimeras med avseende på de i modellen ingående parametrarna.

(2 p)

b) Härled skattningarna av de i Makehams formel ingående parametrarna α och β för fixt γ. Motivera alla steg i härledningen tydligt.

(8 p)

Uppgift 3

Bevisa att

Betrakta ett godtyckligt försäkringsavtal tecknat på en individs liv. Försäkringsavtalet tecknas vid durationen $t = 0$. Vi definierar en stokastisk variabel, X, beräknad vid durationen t, genom

$X(t)$ = nuvärdet av försäkringstagarens framtida förpliktelser enligt försäkringsavtalet vid durationen t.

Härled $E[X(t)]$ och uttryck $E[X(t)]$ med hjälp av traditionella kommutationsfunktioner.

(10 p)

Uppgift 4

Betrakta ett godtyckligt försäkringsavtal tecknat på en individs liv. Försäkringsavtalet tecknas vid tidpunkten 0 då den försäkrade säges vara x år gammal. Till försäkringen definierar vi, för $t \geq 0$, tre betalningsströmmar.

$P(t)$ = summan av de premier som betalas i intervallet $[0, t]$, om den försäkrade lever vid t.

$L(t)$ = summan av de utbetalningar som görs i intervallet $[0, t]$ om den försäkrade lever vid t.

$S(t)$ = slutvärdet, vid tidpunkten t, av de belopp som skall utbetalas om den försäkrade avlider vid tidpunkten t.

Utgående från dessa betalningsströmmar, härled Thieles differentialekvation för en allmän ettlivsförsäkring. Det räcker alltså inte att enbart formulera differentialekvationen, den ska härledas. Det är tillåtet att anta att L och P båda är deriverbara funktioner.

(10 p)

Uppgift 5

Vi betraktar en **kapitalförsäkring för dödsfall på två liv**. Beloppet S kronor betalas ut vid försäkringstidens slut eller vid första dödsfall dessförinnan. Premien betalas så länge båda lever, dock längst i n år. Försäkringstiden är m år.

Ange formeln för försäkringens engångspremie med hjälp av ett heuristiskt resonemang.

(10 p)