Matematiska institutionen
STOCKHOLMS UNIVERSITET

Lösningsskisser till tentamen i Analys, Matematik I, den 18 maj 20121

1. (a) Förlänger vi med konjugatet får vi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+3n}-\sqrt{2n^2-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{2n^2+3n}+\sqrt{2n^2-n}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{2+3/n}+\sqrt{2-1/n}}=\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

(b) Med standardutvecklingen $\ln(r)=t-t^2/2+O(t^3)$ då $t\to 0$ får vi

$$\begin{aligned}&\frac{\ln(1+4x^2)-(\ln(1+2x))^2}{x^3}\\ &=\frac{(4x^2+O(x^4))-\left(2x-2x^2+O(x^3)\right)^2}{x^3}\\ &=\frac{(4x^2+O(x^4))-((2x)^2-2(2x)(2x^2)+O(x^4))}{x^3}\\ &=\frac{8x^3+O(x^4)}{x^3}=8+O(x)\to 8\end{aligned}$$

då $x\to 0$.

2. Vi har att funktionen är definierad och kontinuerlig för alla $x\neq 0$, och

$$f(x)=|x|+2\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}x+2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{om } x>0,\\ -x+2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{om } x<0,\end{cases}$$

Den enda möjliga vertikala asymptoten är vid $x=0$, men $\lim_{x\to 0+}f(x)=\pi$ och $\lim_{x\to 0-}f(x)=-\pi$, så vertikala asymptoter saknas. Däremot får vi

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=0$$

så $y=x$ är en asymptot då $x\to\infty$, och

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$$

så $y=-x$ är en asymptot då $x\to-\infty$.

Derivering ger, efter förenkling,

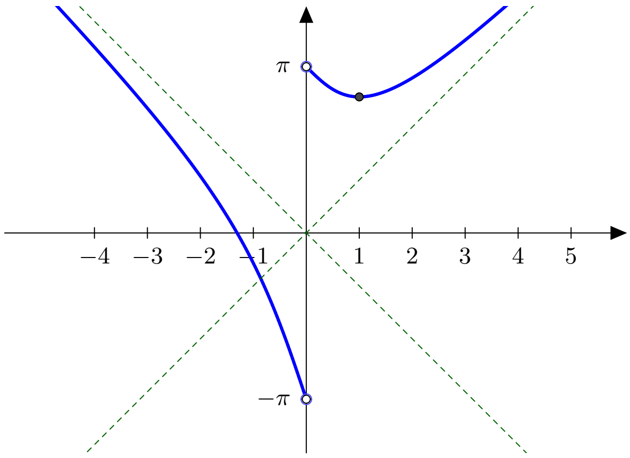
$$f'(x)=\begin{cases}1-\frac{2}{1+x^2} & \text{om } x>0,\\ -1-\frac{2}{1+x^2} & \text{om } x<0\end{cases},\qquad f''(x)=\frac{4x}{(1+x^2)^2},\ \text{om } x\neq 0.$$

Vi ser att $f'(x)$ endast har nollstället $x=1$, och att $f''(x)$ saknar nollställen. Vi gör en teckentabell

x		0		1	
$f'(x)$	-	$\wr$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\wr$	$\searrow$	$1+\pi/2$	$\nearrow$
$f''(x)$	-	$\wr$	+	+	+
$f(x)$	$\frown$	$\wr$	$\smile$	$\smile$	$\smile$

Från teckentabellen ser vi att funktionen har ett lokalt extremvärde, ett lokalt minimum vid $x = 1$. Funktionen är konvex på intervallet $]0, \infty[$, samt konkav på $]-\infty, 0[$.

Vi har nu tillräcklig information för att kunna rita en skiss av grafen:



Slutligen ser vi att funktionens värdemängd är intervallet $]-\pi, \infty[$.

3. Funktionen är kontinuerlig på en kompakt mängd, samt partiellt deriverbar överallt, så enligt en känd sats finns globala maximum och minimum och dessa antas i inre stationära punkter eller på randen.

   Vi börjar med att bestämma de stationära punkterna. Vi får

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2. \end{cases}$$

   Den funna punkten $(x, y) = (0, 1/2)$ uppfyller $x^2 + y^2 < 4$, så det är en inre punkt till området, och därmed en kandidat.

   Vi undersöker nu randen $x^2 + y^2 = 4$, som är en cirkel med radie 2. Vi parametriserar denna

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   Sätter vi in detta i funktionen får vi

$$h(t) = f(2\cos t, 2\sin t) = 4\cos^2 t + 8\sin^2 t - 4\sin t = 4 + 4\sin^2 t - 4\sin .$$

   Vi får $h'(t) = 8\sin t\cos t - 4\cos t = \cos(t)(2\sin(t) - 1)$ så $h'(t) = 0$ om $\cos(t) = 0$ eller $\sin t = 1/2$, vilket ger $t = \pi/2$, $t = 3\pi/2$, $t = \pi/6$ eller $t = 3\pi/2$, inom ett varv av parametriseringen, så vi får kandidatpunkterna $(0, \pm 2)$ respektive $(\pm\sqrt{3}, 1)$. Vi jämför funktionsvärdena:

(x, y)	$(0, 1/2)$	$(\pm\sqrt{3}, 1)$	$(0, 2)$	$(0, -2)$
$f(x, y)$	$-1/2$	3	4	12

   så minsta värdet är $f(0, 1/2) = -1/2$ och det största $f(0, -2) = 12$.

4. Genom att rita en figur av området D ser man att det kan beskrivas av olikheterna $1 \leq y \leq 2$ och $-y \leq x \leq y$, så

$$\iint_D e^{3-y^2}\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_{-y}^{y} e^{3-y^2}\,dx\right) dy = \int_1^2 2ye^{3-y^2}\,dy =$$
$$= \Big[t = y^2,\ dt = 2y\,dy\Big] = \int_1^4 e^{3-t}\,dt = \Big[-e^{3-t}\Big]_{t=1}^{t=4} = e^2 - e^{-1}.$$

5. (a) Området ges av

$$0 \leq y \leq \frac{2}{\sqrt{4+x^2}}, \qquad 0 \leq x \leq 2,$$

så med formeln för rotationsvolym får vi att volymen V_1 ges av

$$V_1 = \pi \int_0^2 \left(\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}\right)^2 dx = \pi \int_0^2 \frac{1}{1+(x/2)^2}\,dx$$
$$= \left[t = x/2, \quad dt = \frac{1}{2}dx\right] = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\pi\big[\arctan(t)\big]_{t=0}^{t=1} = \frac{\pi^2}{2}.$$

(b) Med formeln för cylindriska skal (rörformiga element) får vi

$$V_2 = 2\pi \int_0^2 x\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \Big[u = 4+x^2, \quad du = 2x\,dx\Big]$$
$$= 2\pi \int_4^8 u^{-1/2}\,du = 2\pi \left[\frac{u^{1/2}}{1/2}\right]_{u=4}^{u=8} = 8\pi(\sqrt{2}-1).$$

Anmärkning: Det går också bra att beräkna volymen med skivformeln, vilken ger att $V_2 = \pi \int_0^{1/\sqrt{2}} 2^2\,dy + \pi \int_{1/\sqrt{2}}^1 x^2\,dy$ (där $x^2 = 4(y^{-2}-1)$).

6. (a) Vi multipicerar den linjära differentialekvationen med den integrerande faktorn $e^{x^2/2}$ och får då

$$\left(ye^{x^2/2}\right)' = x^3e^{x^2/2}.$$

Integrerar vi båda sidor, får vi i högerledet

$$\int x^3e^{x^2/2}\,dx = \Big[t = x^2/2, \quad dt = x\,dx\Big] = \int 2te^t\,dt = [P.I.]$$
$$= 2te^t - \int 2e^t\,dt = 2(t-1)e^t + C = (x^2-2)e^{x^2/2} + C$$

vilket ger $ye^{x^2/2} = (x^2-2)e^{x^2/2}+C$, så $y = x^2-2+Ce^{x^2/2}$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger nu att $C = 3$, så $y(x) = x^2 - 2 + 3e^{-x^2/2}$.

(b) Differentialekvationen $y' + xy - xy^2 = 0$ är separabel. Om vi skriver om den som $\frac{y'}{y(y-1)} = x$ och integrerar båda sidor får vi, mha partialbråksuppdelningen $\frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}$. att $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \frac{x^2}{2} + C$, vilket ger $\frac{y-1}{y} = Ae^{x^2/2}$, där $A = \pm e^C$. Utnyttjar vi begynnelsevillkoret $y(0) = 2$ får vi $A = 1/2$, vilket ger $y = \dfrac{2}{2-e^{x^2/2}}$.