MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
R. Bögvad

Analys B HT 2020
Tentamen 07 januari 2021
kl 13-18(förlängd tid 19)

TENTAMEN

- Det här är en hemtenta, så föreläsningsanteckningar och böcker kan förstås användas. Däremot förutsätts det att den skrivande inte kontaktar eller får hjälp av andra personer.

  Tentan lämnas in via kursens hemsida, märkt med anonymiseringskod från ladok. Sista inlämningstid är en timma senare än skrivningstiden.

  För godkänt på denna skriftliga tenta är det tillräckligt med 15 av de 30 poängen, med åtminstone 4 poäng från de blåmarkerade teorifrågorna. För godkänt på kursen tillkommer en godkänd muntlig redovisning av vissa problem; denna kan påverka poängsättningen(uppåt eller neråt).

  Samtliga svar måste motiveras utförligt!

  Låt B, som ska användas i några av uppgifterna nedan, vara sista siffran i ditt personnummer.

1. a) Den generaliserade integralen

$$\int\int\int_{\mathbf{R^3}} \frac{e^{-(2x+By+z)^2}}{(1+(3y+17z)^2)(1+(4z)^2)} dxdydz$$

är konvergent. Beräkna den. (Ledning: byt variabler!) 3p

b) Den lineära transformationen $\sigma : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ är bijektiv och för den kompakta och kvadrerbara kroppen K gäller att $\mathbf{x} \in K \iff \sigma(\mathbf{x}) \in K$. (Här är $\mathbf{x} = (x, y, z)$.) För en viss C^1-funktion $f(x, y, z)$ gäller vidare att $f(\sigma(\mathbf{x})) = -f(\mathbf{x})$. Visa att

$$\int\int\int_K f(x, y, z) dxdydz = 0,$$

1.5p

c) Ge ett konkret exempel på situationen i b); alltså ange en kropp K, en funktion f och ett σ som uppfyller villkoren i b). 0.5p

2. a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{y+1}{x^2+y^2+2y+1}dx - \frac{x}{x^2+y^2+2y+1}dy,$$

där γ är kurvan $|x|+|y| = B+2$ genomlöpt i positiv riktning(B definierades ovan). 3p

b) Räkna upp de (av kursens) satser som du har använt dig av i a).Ge precisa formuleringar av dem och motivera varför de går att tillämpa på problemet i a). 2p

3. a) Visa att kraftfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (\frac{yz}{1+(xyz)^2}, \frac{xz}{1+(xyz)^2}, \frac{xy}{1+(xyz)^2})$$

är konservativt genom att bestämma en potential. 1p

b) Beräkna arean av ellipsskivan E i rummet som är skärningen av ellipsoiden $x^2+y^2+2z^2 \leq 4$ med planet $x-2y=0$. (Ledning: parametrisera skivan lämpligt, t ex med ett område i yz-planet.) 2p

c) Låt $\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + (x+y, y, z+x)$, där $\mathbf{F}$ är fältet i a). Beräkna $\int_\gamma \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r}$, där γ är randen till E (från b) genomlöpt i positiv riktning. 2p

4. (a) Funktionsföljden $f_n(x), n = 1,2...$ konvergerar punktvis mot $f(x)$ for $x \in [0,1]$. Vidare är $f_n(1/n) = f(1/n)+1/2,\ n = 1,2,....$ Visa utgående från definitionen av likformig konvergens att konvergensen inte är likformig. 2p

(b) Visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \arctan(x^2+1)$$

konvergerar likformigt på intervallet $[-1/2, 1/2]$. Finns det störrre intervall där konvergensen också är likformig? Motivera ditt svar! 3p

5. a) Låt $z = x+iy$ och definiera de komplexvärda funktionerna $f_1(z) = x^2-y^2+(-1)^B 2ixy+2$ och $f_2(z) = x^2-y^2+(-1)^{B+1}2ixy+2$. En av dem är en analytisk funktion i hela komplexa talplanet. Vilken? Motivera direkt från en definition. 1p

b) Beräkna den komplexa linje-integralen

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{z} dz,$$

där $g(z) = z - 1$ för följande två kurvor γ. Först är γ hela cirkeln med radie 1 kring origo, genomlöpt i positiv riktning. Den andra kurvan är cirkelbågen med radie 1, från 1 till i i första kvadranten. 2p

c) Räkna upp de (av kursens) satser och definitioner som du har använt dig av i a och b. Ge precisa formuleringar och motivera varför satser och definitioner går att tillämpa. 2p

6. Beräkna flödesintegralen

$$\int\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS,$$

där S är ytan given av $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq B^2 + 1$, orienterad med valfri normal(men redovisa den explicit) och fältet är givet av $\mathbf{u} = (\arctan(72yz), e^{13xz}, z^4)$. 5p