MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
R. Bögvad

Analys B VT 2021
Tentamen 27 maj 2021
kl 8-13(förlängd tid 14)

**TENTAMEN**

- Det här är en hemtenta, så föreläsningsanteckningar och böcker kan förstås användas. Däremot förutsätts det att den skrivande inte kontaktar eller får hjälp av andra personer.
- Tentan lämnas in via kursens hemsida som en pdf, märkt med din anonymiseringskod från ladok. Sista inlämningstid är en timma senare än skrivningstiden, alltså 14(15 med förlängd tid).
- För godkänt på denna skriftliga tenta är det tillräckligt med 15 av de 30 poängen, med åtminstone 4 poäng från de blåmarkerade teorifrågorna. För godkänt på kursen tillkommer en godkänd muntlig redovisning av vissa problem; denna kan påverka poängsättningen(uppåt eller neråt).
- *Samtliga svar måste motiveras utförligt! Speciellt gäller detta teorifrågorna, där villkoren för att använda satser gäller måste explicit anges.*
- **Låt $B$, som ska användas i några av uppgifterna nedan, vara sista siffran i ditt personnummer+1. Är den sista siffran 0,1,...,9 så är alltså B=1,2,...,10**
- **OBS! Ange bonus på första sidan av din skrivning.**

## PROBLEM

1. a) Området $D$ i planet är givet av att $x^2 + y^2 \geq 1$. Är den generaliserade integralen

$$\int\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^B \arctan(x^4+y^4)} dxdy$$

konvergent eller divergent? 3p

b) Ge ett exempel på två kontinuerliga funktioner $f(x,y) \leq g(x,y)$, som är definierade för $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, och för vilka $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy$ är divergent, men $\int\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy$ är konvergent. Varför är existensen av sådana funktioner inte relevant för din lösning i a)? 2p

2. Genom avbildningen $x(u,v) = u^3, y(u,v) = v^3, z(u,v) = u^3$ överförs området $u^2 + v^2 \leq 1$ i $uv$-planet på en yta $Y$ i rummet med rand $C$ som orienteras positivt.(För $B$, se anvisningarna ovan till tentan.)

a) Ge en parametrisering av $C$. 1p

b) Låt $\mathbf{F} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{B})$, och beräkna kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

2p

b) Ange en enhetsnormal $\mathbf{N}$ till ytan $Y$ och beräkna

$$\int\int_Y (\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) dS.$$

2p

3. a) Beräkna

$$A = \int_\gamma z^2 dz$$

där $\gamma$ är det räta linje-segmentet från origo till $(1+i)$ i det komplexa talplanet. 1p

b) Om $\gamma$ i a) hade varit en annan kurva mellan origo och $1+i$ skulle värdet på integralen $A$ varit annorlunda? Motivera ditt svar med hänvisning till de satser som du använder, och ange dessa precist, speciellt med alla villkor som behövs för att de ska gälla. 2p

c) Låt $C_R$ vara en cirkel med radie $R$ och medelpunkt i origo i det komplexa talplanet. För vilka $R \geq 0$, är integralen

$$F(R) := \int_{C_R} \frac{Bdz}{z^2 - 3iz - 2}.$$

väldefinierad? Beräkna den! Ledning: $z^2 - 3iz - 2 = 0$ har två rötter på den imaginära axeln. 2p

4. a) Visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{z^2 + n^2}$$

konvergerar likformigt för $z \in \mathbb{C}$ sådana att $1.1 \leq |z| \leq 1.9$. 2 p

b) Visa att serien i a) konvergerar till en kontinuerlig funktion. 2p

c) Konvergerar serien till en kontinuerlig funktion i större mängder $a \leq |z| \leq b$? I såfall, ange vilka. 1p

5. a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \frac{(y-B)dx - (x+2)dy}{(y-B)^2 + (x+2)^2},$$

där $C$ är kurvan $|x| + |y| = B + 5$ i planet. 3p

b) Ange de cirkelskivor $D$, med medelpunkt i origo och radie $R$ för vilka differentialformen i a) har en potential. 2p

6. Låt $C$ vara alla punkter $(x, y, z)$ sådana att $x^2 + (4B)^2 y^2 = 1$.(Alltså en slags cylinder på ellipsen $x^2 + (4B)^2 y^2 = 1$ i $xy$-planet.) Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + y, 2yz, y^2 + B)$.

a) Bestäm en normal till $C$ och visa att den är ortogonal mot $z$-axeln, samt beräkna rot$\mathbf{F}$. 2p

b) Låt $\gamma_1 \subset C$ och $\gamma_2 \subset C$ vara två enkla slutna $C^1$-kurvor som inte skär sig själva och löper en gång runt $z$-axeln i positiv riktning. Antag dessutom att $\gamma_1$ och $\gamma_2$ inte skär varandra, utan tillsammans är randen till en yta $Y \subset C$. Visa att värdet på

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

inte beror på om $\gamma = \gamma_1$ eller $\gamma = \gamma_2$. Ange noggrant de satser(från kursen) som du använt och beskriv noggrant villkoren för att dessa satser ska gälla. 3p