MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
R. Bögvad

Analys B HT 2020
Tentamen 07 januari 2021
kl 13-19(förlängd tid 20)

LÖSNINGAR

1. a) Kalla integralen I, och genomfor variabelbytet $u = 2x + By + z, v = 3y + 17z, w = 4z$. Jacobianen $\partial(u, v, w)/\partial(x, y, z)$ är $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ och alltså är

$$I = \int\int\int_{\mathbf{R}^3} \frac{e^{-u^2}}{24(1 + v^2)(1 + w^2)} dudvdw.$$

Nu kan vi dela upp I som produkten

$$I = \frac{1}{24} \int_{\mathbf{R}} \frac{dv}{1 + v^2} \int_{\mathbf{R}} \frac{dw}{1 + w^2} \int_{\mathbf{R}} e^{-u^2} du.$$

Den första integranden har $\arctan v$ som primitiv funktion, och värdet av den är π, liksom den andra integralens värde. Den sista är en en standardintegral med värdet $\sqrt{\pi}$- Alltså är $I = \pi^{5/2}/24$.

b) Gör ett variabelbyte i integralen(kallad I) till de nya variablerna $(u, v, w) = \sigma(x, y, z)$. Eftersom σ är en lineär transformation är jakobianen $\partial(u, v, w)/\partial(x, y, z)$ en konstant $J \in \mathbf{R}$, som dessutom är skild från 0, eftersom σ är bijektiv(den är helt enkelt determinanten av matrisen till σ). Alltså får vi

$$\int\int\int_K f(u, v, w)dudvdw = \int\int\int_K f(\sigma(x, y, z))|J|dxdydz =$$

$$= -|J| \int\int\int_K f(x, y, z)dxdydz,$$

eller $I = -|J|I \implies I = 0$.

c) Låt t ex $\sigma(x, y, z) = (x, y, -z)$, $f(x, y, z) = z$ och K vara klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

2. a) Beteckna integralen med $I = \int_\gamma Pdx + Qdy$ och använd Greens sats. Man kollar att $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. De två funktionerna i integralen

är C^1 utanför $(x.y) = (0, -1)$, eftersom då är $x^2+y^2+2y+1 = x^2+(y+1)^2 \neq 0$. Så med Greens sats är $I = -\int_\sigma Pdx+Qdy$ där σ är en cirkel, genomlöpt i positiv riktning, med centrum i $(0, -1)$ och radie ϵ så liten att cirkeln får plats i området $|x|+|y| \leq B+2$. En sådan cirkel kan parametriseras med $x = \epsilon \cos t, y = -1 + \epsilon \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Notera att $y+1 = \epsilon \sin t$ och att $x^2+y^2+2y+1 = \epsilon^2$. Vi får med yttreligare en användning av trigonometriska ettan att

$$I = -\int_0^{2\pi} (\frac{\epsilon \sin t}{\epsilon^2}(-\epsilon \sin t) - \frac{\epsilon \cos t}{\epsilon^2}\epsilon \cos t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

b) Se låroboken för en formulering av Greens sats och motiveringen i texten ovan.

3. a) Integrera första komponenten av kraftfältet m a p x :

$$\int \frac{yzdx}{1+(xyz)^2} = \arctan(xyz) + g(y,z)$$

och sedan ser man genom instoppning att $U(x, y, z) = \arctan(xyz)$ är en potential.

b) I planet är $x = 2y$ och för punkter (x, y, z) på skivan är därför $5y^2 + 2z^2 \leq 4$, vilket är en ellipsskiva F i yz-planet. Vi har alltså parametriseringen $\mathbf{r}(y, z) = (2y, y, z)$ där $[y, z] \in F$, och med area-formeln är ytan av ellipsskivan

$$\int\int_F |\mathbf{r'}_y \times \mathbf{r'}_z| dS = \sqrt{5}\int\int_F dydz = 2\sqrt{2}\pi,$$

eftersom $|\mathbf{r'}_y \times \mathbf{r'}_z| = |(1, -2, 0)| = \sqrt{5}$ samt F har en axel $\sqrt{2}$ och en lillaxel $2/\sqrt{5}$ och alltså arean $(2\sqrt{2}/\sqrt{5})\pi$.

c) Eftersom randen är sluten och $\mathbf{F}$ har en potential(enligt a), så är

$$I = \int_\gamma \mathbf{G} \cdot dbfr = \int_\gamma \mathbf{G_1} \cdot dbfr,$$

där $\mathbf{G_1} = (x + y, y, z + x)$. Tillämpa nu Stokes sats:

$$\int_\gamma \mathbf{G_1} \cdot dbfr = \int\int_E \mathbf{rot G_1} \cdot NdS.$$

Här är $\mathbf{rotG_1} = (0, -1, -1)$ medan en enhetsnormal(i rätt riktning, enligt Stokes sats) fås från planets ekvation och är $(1/\sqrt{5})(1, -2, 0)$. Alltså är

$$I = (2/\sqrt{5}) \int \int_E dS = 2\sqrt{2}\pi/\sqrt{5}$$

enligt b).

4. (a) Vi ser direkt att $M_n; = \sup\{|f(x) - f_n(x)|,\ x \in [0, 1]\} \geq |f(1/n) - f(1/n)| = 1/2$. Därför gäller inte att $\lim M_n = 0$, vilket enligt definitionen innebär att följden inte konvergerar likformigt.

   (b) Vi kan använda Weierstrass M-kriterium. Vi vet att om $x \in [-1/2, 1/2])$ så

$$|x^n \arctan(x^2 + 1)| \leq M_n = (\pi/2)(1/2)^n$$

   och dessutom att den geometriska serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n = 1/2$$

   konvergerar. Alltså konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ och då följer alltså omedelbart likformig konvergens av funktionsserien. Det finns störrre intervall där komvergensen också är likformig: samma argument användande att $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\epsilon)^n$ konvergerar ger nämligen likformig konvergens på varje intervall av formen $[-1+\epsilon, 1-\epsilon]$, där $1 \geq \epsilon > 0$.

5. a) En koll med Cauchy-Riemanns ekvationer ger att det är bara $x^2 - y^2 + 2ixy + 2$ som är en analytisk funktion. Den är för ovrigt lika med z^2 och har den komplexa derivatan $2z$.

   b) $\frac{g(z)}{z} = 1 - 1/z$, så kurvintegralen är

$$\int_\gamma dz - \int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

   När γ är hela cirkeln, så ger Cauchys sats att den första integralen är 0 och hans integralformelatt den andra är $2\pi i$. Svaret är alltså $-2\pi i$.

   För att beräkna integralen för den andra kurvan kan vi parametrisera cirkelbågen med $z = e^{it},\ 0 \leq t \leq \pi/2$. Då är $dz = ie^{it}dt$ samt $1/z = e^{-it}$ och integralen blir

$$\int_\gamma dz - \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{\pi/2} (1 - e^{-it}) ie^{it} dt = [e^{it} - it]_{t=0}^{t=\pi/2}.$$

Svaret blir alltså $i(1-\pi/2)-1$.

c) Se ovan och kurslitteraturen för satsernas formulering

6. Det här är förstås en standardtillämpning av Gauss sats! Låt K vara kroppen begränsad av S och ett lock T som ges av $z = B^2+1$ och $B^2+1 \geq \sqrt{x^2+y^2}$. (Man kan lätt inse att rotationskroppen K är en kon f ö.)

   Randen av K är given av S och T, och vi väljer att orientera bägge dessa med från kroppen K utåtriktade normaler.

   Gauss sats ger nu att

$$\int\int_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}dS + \int\int_T \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}dS = \int\int\int_K div\mathbf{u}dxdydz.$$

   Vi ska alltså beräkna de två sista integralerna. På cirkelskivan T med radie B^2+1 och area $\pi(B^2+1)^2$ är enhetsnormalen $\mathbf{N}=(0,0,1)$ och $z = B^2+1$ så

$$\int\int_T \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}dS = \int\int_T z^4 dS = \int\int_T (B^2+1)^4 dS = \pi(B^2+1)^2(B^2+1)^4 = \pi(B^2+1)^6.$$

   Trippelintegralen är, eftersom $div\mathbf{u} = 4z^3$, (med E området i xy-planet, givet av $B^2+1 \geq \sqrt{x^2+y^2}$)

$$\int\int\int_K 4z^3 dxdydz = \int\int_E \left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=B^2+1} 4z^3 dz\right) dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{B^2+1} ((B^2+1)^4 - r^4) r dr d\phi =$$

$$= 2\pi(B^2+1)^6(1/2-1/6) = \frac{2\pi(B^2+1)^6}{3}.$$

   Sammantaget:

$$\int\int_S \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}dS = \frac{2\pi(B^2+1)^6}{3} - \pi(B^2+1)^6 = \frac{-\pi(B^2+1)^6}{3}.$$