MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
R. Bögvad

Analys B HT 2020
Lösningar till tentamen 24 februari 2021
9-14(förlängd tid 15)

LÖSNINGAR

1. a) Vi bör byta koordinater... Försök t ex med $u = xy$ och $v = x^2 - y^2$, eftersom D (delvis, vad innebär $y \geq 0$?) är givet som området E bestämt av olikheterna $u \geq 1$ och $v \geq 1$. Då är funktionaldeterminanten

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = y(-2y) - (2x)x = -2(x^2+y^2) \iff \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{-2(x^2+y^2)}.$$

Alltså är

$$\int\int_D \frac{(x^2+y^2)e^{y^2-x^2}}{x^2y^2} dxdy = (1/2) \int\int_E \frac{e^{-v}}{u^2} dudv = \tag{1}$$

$$(1/2) \int_1^\infty e^{-v} dv \int_1^\infty \frac{du}{u^2} = \frac{e^{-1}}{2}. \tag{2}$$

För att ovanstående ska vara ett giltigt argument bör vi för det första kontrollera att variabelbytet ovan är bijektivt. Om $u = xy$ och $v = x^2 - y^2$ kan vi lösa ut x och y? Vi ser att villkoret $y \geq 0$ tillsammans med $xy \geq 1$ ger att $x > 0$. Vidare får vi att $u^2 + 4v^2 = (x^2 + y^2)^2$, så $x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + 4v^2}$ och $2x^2 = v + \sqrt{u^2 + 4v^2}$, vilket ger att vi kan lösa ut x entydigt(vad är x?), eftersom x är positivt. Ett liknande argument ger y, och alltså hör till varje $(u, v) \in E$ ett och endast ett $(x, y) \in D$, d v s variabelbytet är bijektivt.

För det andra är integralerna generaliserade, men vi noterar att den uttömmande följden som vi har använt given av $E_n = \{(u, v) \, 1 \leq u \leq n, 1 \leq v \leq n$, svarar via bijektionen mot en uttömmande följd D_n och att integranden är positiv, så att det räcker att betrakta en enda uttömmande följd för att se att integralen är konvergent och beräkna dess värde. Alltså har vi validerat räkningen ovan.

3p

b)

i)-iii) Det är bara om integranden är positiv som det fungerar att bara betrakta en enda uttömmande följd(PB s 274-5). Det var den i beräkningen i a), så därför fungerar beräkningen där. Integralen är divergent eftersom om vi väljer en annan uttömmande följd av cirkelskivor med en annan radie $r_n \to \infty$, så kommer vi att få att integralen blir $\pi \sin(r_n^2)$ som inte behöver ha något gränsvärde alls, om vi väljer radierna lämpligt.

2p

2. Om ett vektorfält (P,Q) har potential(men inte omvänt!) gäller $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Man ser direkt att detta villkor inte är uppfyllt av $\mathbf{F_2}$ och måste det av problemformuleringen vara $\mathbf{F_1}$ som har en potential. Vi hittar den genom att först hitta en primitiv funktion

$$\int (e^x + \arctan y)dx = e^x + x \arctan y + \phi(y),$$

och sedan ta derivatan m. a p y och jämföra med $\frac{x-y}{1+y^2}$, vilket ger att

$$\phi'(y) = \frac{-y}{1+y^2} \implies \phi(y) = -(1/2)\ln(1+y^2) + C.$$

Därmed har vi visat att $V(x,y) = e^x + x \arctan y - (1/2)\ln(1+y^2)$ är en potential till $\mathbf{F_1}(x,y)$.

Eftersom $\mathbf{F_1}$ har en potential är kurvintegralen av fältet längs en sluten kurva 0. För den andra kurvintegralen tillämpar vi parametriseringen $\mathbf{r}(x,y) = ((B+2)\cos t, (B+2)\sin t)$ av γ. Det ger

$$\int_\gamma (-y,x) \cdot d\mathbf{r} = (B+2)^2 \int_0^{2\pi} (sin^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi(B+2)^2.$$

5 p

3. a) Eventuella singulariteter är när kraftfältet inte är definierat d v s när $x^2 + 2x + y^2 + 2y + 2 = 0$, Kvadratkomplettering ger att $x^2 + 2x + y^2 + 2y + 2 = 0(x+1)^2 + (y+1)^2$ så detta inträffar precis när $x = -1$ och $y = -1$. 1p

   b) Man kontrollerar att $\mathbf{F}(x,y) = (P,Q)$ uppfyller villkoret i Greens sats att $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Låt området E vara givet av $|x| + |2y| \leq B+4$ och $(x+1)^2 + (y+1)^2 \geq \epsilon$—det är alltså ett område vars rand är

γ och en cirkel C med singulariteten $(-1,-1)$ som medelpunkt och ϵ som radien(om ϵ är lagom stort). På E kan vi, enligt vad som nyss sas, tillämpa Greens sats, och får att kurvintegralen längs γ är är lika stor som kurvintegralen längs cirkeln C, given av $(x+1)^2+(y+1)^2 = \epsilon$. Den sista parametriserar vi som $(x, y) = (-1 + \epsilon \cos t, -1 + \epsilon \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$. Då blir kurvintegralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{\epsilon \sin t}{\epsilon^2}(-\epsilon \sin t) - \frac{\epsilon \cos t}{\epsilon^2}(\epsilon \cos t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

2p

c) Se kurslitteraturen. 2p

4. (a) Att funktionsföljden $f_n(x), n = 1, 2...$ konvergerar likformigt mot $f(x)$ för $x \in [0, 1]$, betyder att det finns en följd av tal M_n så att $|f(x) - f(x)| \leq M_n$ för alla $x \in [0, 1]$ och att dessutom $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$. Det vet vi alltså om följden f_n. Men tittar vi då på följden $g_n(x) = f_n(x) + x/n$ så ser vi att för alla $x \in [0, 1]$ $|f(x) - g_n(x)| = |(f(x) - f_n(x)) - (x/n| \leq |f(x) - f_n(x)| + |x/n| \leq M_n + 1/n \to 0$ när $n \to \infty$. Alltså till skillnaden mellan följden $g_n(x)$ och dess gränsvärde $f(x)$, finns det också en likformig begränsning $M_n + 1/n$ som går mot 0. Därmed konvergerar $g_n(x)$ likformigt. 2p

   (b) Vi uppskattar de olika delar som ingår i termerna i serien. $0 \leq \arctan(nx^2+72) \leq \pi/2$ och om $|x| \leq 1$ så är alltså $x^{\arctan(nx^2+72)} \leq 1$. Vidare är förstås $|\cos x| \leq 1$. Alltså är

$$|x^{n+\arctan(nx^2+72)} \cos x| \leq (1/2)^n.$$

   Eftersom serien $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^n$ är konvergent så konvergerar vår serie likformigt enligt Weierstrass M-kriterium. Samma argument fungerar för varje intervall $[-1+\epsilon, 1+\epsilon]$där $\epsilon \geq 0$. För $x = 1$ så konvergerar serien inte eftersom den då är en summa av oändligt många termer $\cos 1 \neq 0$, så detta är det bäst möjliga resultatet.

3p

5. a) Enklast är att använda Cauchy-Riemanns ekvationer. De partiella derivatorna är lätta att beräkna, och ekvationerna är endast uppfyllda för f_1. 2p

b) $f(z) := \frac{z-1}{z-2} = 1 + \frac{1}{z-2}$ så vi ser att $f(z)$ har en enkel pol i $z = 2$ med residy 1. Enligt Cauchys inregralsats(varför är villkoren uppfyllda?) blir då integralen

$$\int_\gamma \frac{z-1}{z-2} dz.$$

0, när γ är cirkeln med radie 1 kring origo(eftersom polen inte ligger i det inre av cirkeln) och $2\pi i$ för cirkeln med radie 3. 1p

c) Se kurslitteraturen. 2p

6. a) Det absurt jobbiga uttrycket för kraftfältet antyder att det är tänkt att man ska använda Gauss sats(men det går också att beräkna direkt från definitionen av en flödesintegral; då måste man skickligt använda symmetri för att se att flera termer av ens integral är 0).

Ytan är en rotationsparaboloid som har en utåtriktad normal som är $(2x, 2y, -1)$, enligt en formel i PB för normaler till funktionsytor. Alltså kan vi ta och orientera Y med enhetsnormalen $N = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x, 2y, -1)$.

Låt K vara kroppen $z \geq x^2+y^2,\ 0 \leq z \leq B+3$. Dess rand består dels av Y och delsa av ett "lock" L: $z = B+3$ med uppåtriktad normal. Gauss sats säger att

$$\int\int_Y \mathbf{u}\cdot\mathbf{N} dS + \int\int_L \mathbf{u}\cdot\mathbf{N} dS = \int\int\int_K div\mathbf{u} dxdydz.$$

På locket är enhetsnormalen $N = (0,0,1)$, och $z = B+3$ så $\mathbf{u}\cdot\mathbf{N} = x^3 - (B+3) + (B+3)^2$. P g a symmetrin är

$$\int\int_L x^3 dS = 0,$$

och eftersom locket är en cirkelskiva med radie $\sqrt{B+3}$, så är

$$I_1 = \int\int_L -(B+3)+(B+3)^2 dS = \pi(-(B+3)+(B+3)^2))(B+3).$$

Vidare är $div\mathbf{u} = (1 - e^y) + e^y + 2z - 1) = 2z$, så att

$$I_2 = \int\int\int_K div\mathbf{u}dxdydz = \int\int_D (\int_{z=x^2+y^2}^{B+3} 2zdz)dxdy = \quad (3)$$

$$\int\int_D ((B+3)^2 - (x^2+y^2)^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{B+3}} ((B+3)^2 - r^4)rdrd\theta \quad (4)$$

$$= 2\pi((1/2)(B+3)^2(\sqrt{B+3})^2 - (1/6)(\sqrt{B+3})^6) = \quad (5)$$

$$2\pi(B+3)^3(1/3). \quad (6)$$

Enligt det tidigare är svaret nu $I_2 - I_1$, som förstås går att förenkla....

3p

b) Se kurslitteraturen. 2p