MT5002 – Sannolikhetsteori II – (hem-)tentamen

Datum Fredag 4 juni, 2021
Examinator Daniel Ahlberg
Hjälpmendel Kursboken samt annan elektronisk eller fysisk litteratur, beräkningsprogram, etc. Samarbete eller assistens av någon person är ej tillåten.
Bedömning Tentamen består av en basdel och en betygsgrundande del, vilka består av 20 respektive 40 poäng var. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsgrundande delen, vilken bestämmer betyget. För högre betyg (A och B) krävs, utöver uppnådd poängnivå, att lösningarna som helhet bedöms välskrivna och välmotiverade. Ett antal inlämningsuppgifter under kursens gång har kunnat generera upp till sex bonuspoäng, vilka räknas in i den betygsgrundande delen. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen (bonuspoäng inräknade):

	A	B	C	D	E
Basdel					14
Betygsgrundande del	40	30	20	10	0

Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Försäkran. Dina inlämnade lösningar behöver innehålla ditt namn samt följande passage för att bli godkända: *Jag försäkrar på heder och samvete att jag inte fått hjälp av någon annan person för att lösa dessa uppgifter.*

Basdel

Uppgift 1. Låt $(X, Y)'$ vara multivariat normalfördelad med väntevärdesvektor och kovariansmatris som ges av

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Låt $U = X - Y$ och $V = 2X + Y$. Bestäm $\mathbb{E}[V|U = u]$ för $u \in \mathbb{R}$. (4p)

Uppgift 2. Låt $(X, Y)'$ vara en slumpvektor vars täthet ges av

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 3/2 & 0 \le y \le x \le 1, \\ 1/2 & 0 \le x < y \le 1. \end{cases}$$

Avgör om väntevärdena för X och Y är lika eller ej. (4p)

Uppgift 3. Avgör vilka två av följande funktioner som är momentgenererande funktion för någon stokastisk variabel X, och bestäm variansen av X i dessa fall: (4p)

$$\psi_1(t) = 2, \quad \psi_2(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-4t}), \quad \psi_3(t) = e^{\pi t^2}, \quad \psi_4(t) = 1 - e^{t^2}.$$

Uppgift 4. Låt $(X,Y)'$ vara en slumpvektor där X är Poisson-fördelad med parameter $\lambda > 0$ och den betingade fördelningen för Y givet $X = n$ är binomialfördelad med parametrar n och p. Beräkna $\mathbb{E}[XY]$ samt $\mathrm{Var}(Y)$. (4p)

Uppgift 5. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende och likafördelade stokastiska variabler vars fördelning bestäms av täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \frac{2}{3}(1+x), \quad x \in [0,1].$$

Låt $M_n := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Visa att $M_n \to 0$ i sannolikhet, då $n \to \infty$. (4p)

Betygsgrundande del

Uppgift 6. Låt X och Y vara oberoende standard normalfördelade stokastiska variabler. Låt $U = aX + bY$ och $V = cX + dY$ för tal $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, och sätt

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att U och V är oberoende om och endast om $ac + bd = 0$. (5p)

(b) Visa att $(U,V)'$ är en kontinuerlig slumpvektor om och endast om B är inverterbar. (5p)

Uppgift 7. Låt (X,Y) vara en slumpvektor vars täthet ges av

$$f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-x/y}, \quad \text{för } x \geq 0, 0 < y \leq 1.$$

(a) Visa att för $y \in (0,1]$ så är den betingade fördelningen för X givet $Y = y$ är en exponentialfördelning med väntevärde y. (4p)

(b) Bestäm den momentgenererande funktionen $\psi_X(t)$ för $t < 1$. (6p)

Uppgift 8. Adam och Berit har bakat två identiska cylindriska tårtor. Adam placerar tio ljus på oberoende och likformigt fördelade positioner på den ena tårtan. Berit skär upp den andra tårtan i tio lika stora bitar och placerar sedan ett ljus per bit på oberoende och likformigt fördelade positioner.

(a) Berit hävdar att det förväntade anståndet från mittpunkten till det ljus som står närmast mittpunkten på Adams tårta är lika med motsvarande förväntade avstånd på Berits tårta. Avgör om Berit har rätt. (5p)

(b) Adam fortsätter att placera ut ljus på sin tårta på likformigt fördelade positioner valda oberoende av varandra. Låt Z_n ange avståndet från tårtans mittpunkt till det ljus som står närmast mittpunkten då Adam placerat ut n ljus. Bestäm a_n så att $a_n Z_n^2$ konvergerar i fördelning mot en exponentialfördelad stokastisk variabel med väntevärde 1. (5p)

Förtydligande: Berit skär tårtan med raka snitt från mittpunkt till randen.

Uppgift 9. I en urna ligger initialt en röd och en blå boll. I var tidssteg dras en boll ur urnan (enligt den likformiga fördelningen), och läggs sedan tillbaka tillsammans med en boll av motsatt färg. Låt Y_n ange andelen röda bollar i urnan efter n omgångar.

(a) Visa att den förväntade förändringen $\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n | Y_n = p]$ är positiv då $p < 1/2$ och negativ då $p > 1/2$. (5p)

(b) Visa att $\mathbb{E}[Y_n] = 1/2$ för alla $n \geq 0$. (5p)

Förtydligande: Y_n kan enbart anta värden på formen $k/(n+2)$ för $k = 1, 2, \ldots, n+1$, så det är underförstått att p är av denna form.

Bonus: Hur tror du följden $(Y_n)_{n\geq 0}$ utvecklas över tid? Tror du den konvergerar, och i så fall mot vad?