Lösningar tenta Sanno II 2021-06-04

BASDEL

1 Vi har $(X,Y)' \sim N(\mu,\Lambda)$ där $\mu = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ och $\Lambda = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$.
Dessutom

$$\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}.$$

Enligt sats så är $(U,V)' \sim N(B\mu, B\Lambda B')$.

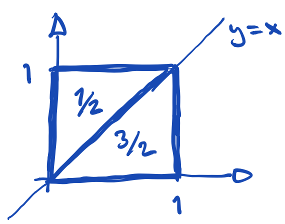
$$B\mu = \begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$B\Lambda B' = \underbrace{\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0\\0&6\end{pmatrix} \qquad 2p$$

U och V är okorrelerade och därmed oberoende (ty $(U,V)'$ multivariat normal). Ur ovan utläser vi att 1p

$$\mathbb{E}[V \mid U=u] = \mathbb{E}[V] = 2, \qquad \forall u \in \mathbb{R}. \qquad 1p$$

2 Vi ritar en bild:



För att bestämma väntevärden tar vi först fram marginalfördelningarna.

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy$$
$$= \int_0^x \tfrac{3}{2}\,dy + \int_x^1 \tfrac{1}{2}\,dy = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}(1-x)$$
$$= \tfrac{1}{2} + x \qquad \text{för } x \in [0,1].$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dx$$
$$= \int_0^y \tfrac{1}{2}\,dx + \int_y^1 \tfrac{3}{2}\,dx = \tfrac{y}{2} + \tfrac{3}{2}(1-y)$$
$$= \tfrac{3}{2} - y \qquad \text{för } y \in [0,1]. \qquad 2p$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x\left(\tfrac{1}{2}+x\right)dx = \left[\tfrac{x^2}{4} + \tfrac{x^3}{3}\right]_0^1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{12}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y\left(\tfrac{3}{2}-y\right)dy = \left[\tfrac{3y^2}{4} - \tfrac{y^3}{3}\right]_0^1 = \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12}$$

Alltså har vi $\mathbb{E}[X] > \mathbb{E}[Y]$. 2p

$\boxed{3}$ MGF för en stokastisk variabel X ges av

$$\psi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$$

förutsatt att detta är väldefinierat för $|t|$ litet.

Från definitionen utläser vi att $\psi_X(0) = 1$ och $\psi_X(t) \geq 0 \; \forall t$.
Därmed kan ψ_1 och ψ_4 ej vara MGF för någon X. 2p

ψ_2 känner vi igen som MGF för en stokastisk variabel som antar värdena 0 och -4 med lika sannolikhet.

ψ_3 känner vi igen som MGF för en $N(0, 2\pi)$-fördelning.

Tillhörande X har därmed varians 4 resp. 2π. 2p

$\boxed{4}$ Vi har $Y \mid X = n \sim \text{Bin}(n, p)$ och $X \sim \text{Po}(\lambda)$.
Enl. definition av betingade väntevärden och varians får vi

$$\mathbb{E}[Y \mid X = n] = pn$$
$$\text{Var}(Y \mid X = n) = np(1-p)$$ 1p

Räkneregler för betingat väntevärde ger

$$\mathbb{E}[XY] \underset{\text{sats}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY \mid X]] \underset{\text{räkneregel}}{=} \mathbb{E}[X\,\mathbb{E}[Y \mid X]] \underset{\text{enl. ovan}}{=} \mathbb{E}[pX^2]$$

Eftersom en $\text{Po}(\lambda)$-fördelning har väntevärde och varians λ får vi

$$\mathbb{E}[XY] = p\,\mathbb{E}[X^2] = p\left(\text{Var}(X) + \mathbb{E}[X]^2\right) = p\lambda(1+\lambda).$$ 2p

Med betingade variansformeln får vi

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y) &= \mathbb{E}[\text{Var}(Y \mid X)] + \text{Var}(\mathbb{E}[Y \mid X]) \\
&= \mathbb{E}[Xp(1-p)] + \text{Var}(pX) \\
&= p(1-p)\lambda + p^2\lambda \\
&= p\lambda
\end{aligned}$$ 1p

$\boxed{5}$ Vi vill visa att, för varje $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|M_n| > \varepsilon \right) \to 0 \qquad \text{då } n \to \infty.$$

Eftersom $X_1, X_2, \ldots$ är icke-negativa så är $M_n \geq 0$. Därmed får vi

$$\mathbb{P}(|M_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_1 > \varepsilon)^n = (1 - F_X(\varepsilon))^n.$$

2p

Vi har för $\varepsilon \in (0,2)$

$$F_X(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \frac{2}{3}(1+x)\,dx = \left[\frac{2}{3}\left(x + \frac{x^2}{2}\right) \right]_0^\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Därmed gäller $F_X(\varepsilon) > 0$ för var $\varepsilon > 0$, vilket ger

$$\mathbb{P}(|M_n| > \varepsilon) = (1 - F_X(\varepsilon))^n \to 0, \qquad \text{då} \quad n \to \infty.$$

2p

Klart!

BETYGSGRUNDANDE DEL

$\boxed{6}$ Eftersom X och Y är oberoende $N(0,1)$ så är vektorn $(X,Y)' \sim N(0,I)$.
Enligt sats följer det att

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

är igen multivariat normal med kovariansmatris

$$\Lambda = BIB' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

2p

(a) Ur kovariansmatrisen får vi att

$$\mathrm{Cov}(U,V) = ac+bd$$

vilket är noll om och endast om $ac+bd=0$. Eftersom oberoende variabler är okorrelerade och okorrelerade komponenter av en multivariat normal är oberoende, så följer det att U och V är oberoende om och endast om $ac+bd=0$.

3p

(b) En slumpvektor (U,V) är kontinuerlig om och endast om det existerar en (täthets-) funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sådan att

$$F_{U,V}(u,v) = \int_{-\infty}^{u} \int_{-\infty}^{v} f(x,y)\,dy\,dx.$$ 1p

En multivariat normal har en täthetsfunktion om kovarians-matrisen Λ är inverterbar, vilket den är om $\det(\Lambda) > 0$.

$$\det(\Lambda) = \det(B) \cdot \det(B') = \det(B)^2$$

Om B är inverterbar så är $\det(\Lambda) > 0$ och en täthet existerar. 2p

Om B inte är inverterbar så avbildas $(X,Y)'$ på ett underrum av $\mathbb{R}^2$ av dimension 1 (eller 0). En täthet kan då inte existera. 2p

7 ⓐ För att bestämma det betingade väntevärdet tar vi först fram den betingade fördelningen av X givet $Y=y$. Per definition är det den vars täthet ges av

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$ 1p

Eftersom

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^\infty 2e^{-x/y}\,dx = \left[-2e^{-x/y} \cdot y\right]_0^\infty = 2y$$ 1p

för $y \in [0,1]$, så får vi för $y \in [0,1]$ att

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{y} e^{-x/y} \qquad \text{för } x \geq 0.$$ 1p

Detta är tätheten av en exponentialfördelning med väntevärde y. Därmed $\mathbb{E}[X \mid Y=y] = y$ för $y \in [0,1]$. 1p

ⓑ För att bestämma MGF för X betingar vi på Y.

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[e^{tX} \mid Y]\,].$$ 2p

Enligt tabell har vi

$$\mathbb{E}[e^{tX} \mid Y=y] = \frac{1}{1-yt} \qquad \text{för } t < \frac{1}{y}$$

2p

ty den betingade fördelningen är en exp-fördelning. Detta ger för $t<1$

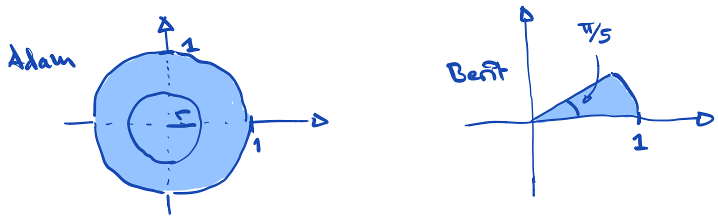
$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^1 \mathbb{E}[e^{tX} \mid Y=y]\,2y\,dy = \int_0^1 \frac{2y}{1-ty}\,dy$$

$$= \frac{2}{t}\int_0^1 \left(\frac{1}{1-ty} - 1\right)dy = \frac{2}{t}\left[-\frac{1}{t}\ln(1-ty) - y\right]_0^1 = -2\frac{\ln(1-t)}{t^2} - \frac{2}{t}$$

(För $t=0$ gäller ovanstående förstås inte, utan $\psi_X(0)=1$.) 2p

8 Notera att för problemet så spelar det ingen roll om Berit placerar ett ljus per bit, eller samtliga ljus på en bit, eftersom bitarna är identiska. Vi antar därför det senare.

Ljusens positioner väljs därmed enligt följande



2p

(Vi antar radie på tårtorna är ett.)

(a) Låt X ange avstånd till mittpunkt på Adams tårta och Y avstånd till mittpunkt (origo) på Berits tårta, båda för ett godtyckligt ljus. Då gäller

$$\mathbb{P}(X \le r) = \frac{\text{area cirkel radie } r}{\text{area cirkel radie } 1} = \frac{\pi r^2}{\pi} = r^2$$

$$\mathbb{P}(Y \le r) = \frac{\text{area sektor radie } r}{\text{area sektor radie } 1} = \frac{\frac{\pi r^2}{10}}{\frac{\pi}{10}} = r^2$$ 2p

Avståndet från mittpunkt till ett godtyckligt ljus har därmed samma fördelning för Adam som Berit. Eftersom ljusen placeras oberoende av varandra är avståndet till ljuset närmast mitten också lika i fördelning. Förväntade avstånden är därmed lika och Berit har rätt. 2p

(b) Vi vill bestämma a_n så att

$$\mathbb{P}(a_n Z_n^2 \le x) \to 1 - e^{-x} \quad \text{för } x \ge 0.$$ 1p

Med information om X ovan får vi för $x \ge 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a_n Z_n^2 \le x) &= \mathbb{P}\left(Z_n \le \sqrt{\tfrac{x}{a_n}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(Z_n > \sqrt{\tfrac{x}{a_n}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X > \sqrt{\tfrac{x}{a_n}}\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - F_X\left(\sqrt{\tfrac{x}{a_n}}\right)\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - \tfrac{x}{a_n}\right)^n.
\end{aligned}$$ 2p

För önskad konvergens är $a_n = n$ ett lämpligt val. 1p

$\boxed{9}$ Låt R_n ange antalet röda bollar i urnan efter n steg.
För $k = 1, 2, \ldots$ låt

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{blå dras omgång } k \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Efter n omgångar finns $n+2$ bollar i urnan, så

$$R_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$Y_n = \frac{R_n}{n+2}$$

Notera dessutom att givet $Y_n = p$ så är $X_{n+1} \sim \mathrm{Bern}(1-p)$. 2p

(a) Ovan observationer leder till...

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n \mid Y_n = p] = \mathbb{E}\left[\frac{R_n + X_{n+1}}{n+3} \,\Big|\, Y_n = p\right] - p$$

$$= \frac{1}{n+3}\mathbb{E}[(n+2)Y_n + X_{n+1} \mid Y_n = p] - p$$

$$= \frac{1}{n+3}\Big((n+2)p + \mathbb{E}[X_{n+1} \mid Y_n = p] - (n+3)p\Big)$$

$$= \frac{1}{n+3}\big(1 - 2p\big)$$ 2p

Detta uttryck är >0 för $p < 1/2$ och <0 för $p > 1/2$. 1p

(b) Notera att $Y_0 = 1/2$, så $\mathbb{E}[Y_0] = 1/2$.
Låt oss nu anta att $\mathbb{E}[Y_n] = 1/2$. Från ovan beräkning följer då

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y_{n+1} - Y_n \mid Y_n]]$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n+3}(1 - 2Y_n)\right]$$

$$= \frac{1}{n+3}\big(1 - 2\mathbb{E}[Y_n]\big)$$

$$= 0.$$

Detta ger $\mathbb{E}[Y_{n+1}] = \mathbb{E}[Y_n] = 1/2$. Enligt induktionsprincipen följer det att $\mathbb{E}[Y_n] = 1/2$ för alla $n \geq 0$. 5p