STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematisk statistik

MT 3001
TENTAMEN
22 oktober 2021

Tentamen i Sannolikhetsteori I

22 oktober 2021 kl. 8–13

Examinator: Maria Deijfen, 070-3369790, mia@math.su.se
Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och normalfördelningstabell. Alla hjälpmedel delas ut vid tentamenstillfället.
Återlämning: Tentaresultatet läggs in i ladok senast fredag 5 november.

Varje korrekt löst uppgift ger 10 poäng. För godkänt betyg krävs minst 20 poäng på basdelen. Den svårare delen rättas endast om basdelen är godkänd och betyget sätts då utifrån poängen på den svårare delen: E:0-6, D:7-12, C:13-18, B:19-24, A:25-30. Resonemang skall vara klara och tydliga att följa. Införda beteckningar ska definieras.

Basdel

Uppgift 1

Här följer fem flervalsfrågor. Varje fråga har endast ett rätt svarsalternativ. Besvara frågan genom att ange det rätta alternativet. Svaren behöver inte motiveras.

a) I tärningspoker kastas fem tärningar simultant. Låt A vara händelsen att (minst) två av tärningarna kommer upp med samma siffra, B händelsen att (minst) tre av tärningarna kommer upp med samma siffra, och C händelsen att man får kåk (dvs ett par och ett tretal). Vad är sant?

1. $C = A \cup B$
2. C kan inte uttryckas med hjälp av A och B på något enkelt sätt
3. $C = A \cap B$

b) Fyra norrmän, tre finnar och sex svenskar ska placeras på en rad med tretton stolar. Hur många placeringar finns det om alla personer av samma nationalitet måste sitta bredvid varandra?

1. $4!3!6!13^3$
2. $4!3!6!3!$
3. $\binom{13}{4}\binom{9}{3}\binom{6}{6}$

c) Låt $F(x)$ vara fördelningsfunktionen för den stokastiska variabeln X. Vilken fördelningsfunktion har variabeln $Y = aX + b$, där a och b är konstanter och $a > 0$?

1. $F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{a+b}\right)$
2. $F_Y(y) = F_X(ay + b)$
3. $F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$
4. $F_Y(y) = aF_X(y) + b$

d) Låt X och Y vara stokastiska variabler med $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \sigma^2 > 0$ och $\text{Var}(X + Y) = 2\sigma^2$. Vad är sant?

1. Man kan inte avgöra om X och Y är oberoende och inte heller om $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
2. X och Y är oberoende, men man kan inte avgöra om $\text{Cov}(X, Y) = 0$ eller inte.
3. $\text{Cov}(X, Y) = 0$ och X och Y är oberoende.
4. $\text{Cov}(X, Y) = 0$ men man kan inte avgöra om X och Y är oberoende.

e) Låt $X_1, \ldots, X_{10}$ var oberoende $N(2, 4)$-fördelade. Den största av de tio stokastiska variablerna har fördelningsfunktion F_{max}. Vad gäller?

1. $F_{max}(0) = 1 - 4^{-10}$
2. $F_{max}(0) = 4^{-10}$
3. $F_{max}(2) = 2^{-10}$
4. $F_{max}(2) = 1 - 2^{-10}$

Uppgift 2

För händelserna A och B gäller att $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.12$ och $P(A \cup B) = 0.32$.

a) Beräkna sannolikheten att ingen av händelserna A och B inträffar.

b) Beräkna sannolikheten att både A och B inträffar.

c) Beräkna sannolikheten att exakt en av händelserna A och B inträffar.

Uppgift 3

Den diskreta stokastiska variabeln X kan bara anta värdena 0, 1, 2 och 3. Man vet att $p(1) = 0.2$, $p(2) = 0.3$ och $p(3) = 0.4$. Beräkna:

a) $p(0)$;

b) $P(X > 1)$;

c) $\mathbf{E}[X]$;

d) $\text{Var}(X)$.

Svårare del

Uppgift 4

När man tillverkar gem utgår man från en metalltråd med längden 1.6 meter. Tråden kapas, böjs till i gem-form och samtliga gem förpackas sedan i en kartong med texten "100 gem". Om det på slutet återstår en liten trådbit som inte räcker till ett gem så slängs denna bit. Längden på metalltråden hos ett gem ska vara 15.9 mm men kan variera något. Antag att längden beskrivs av en stokastisk variabel med väntevärde 15.9 mm och standardavvikelse 0.5 mm.

a) Beräkna sannolikheten att kartongen innehåller minst 100 gem.

b) Hur lång metalltråd måste man utgå ifrån för att sannolikheten att kartongen innehåller minst 100 gem ska vara 99.9%?

Uppgift 5

Man har fem bollar och för var och en av bollarna kastar man ett symmetriskt mynt för att bestämma färgen på bollen: Om man får krona målas bollen vit, om man får klave målas bollen röd. De målade bollarna stoppas in i en låda. Sedan drar man en boll slumpvis fem gånger ur lådan med återläggning. Antag nu att den dragna bollen är vit varje gång. Vad är då (givet att bollen är vit varje gång) sannolikheten att alla fem bollar i lådan är vita?

Uppgift 6

En punkt väljs likformigt på intervallet $[0, 2]$. Punkten delar intervallet i två delar. Bilda en rektangel med bas som har längd som den ena delen av intervallet och höjd som den andra delen av intervallet.

a) Beräkna sannolikheten av arean av rektangeln är mindre än 0.5.

b) Beräkna kovariansen mellan rektangelns area och bas.

Lycka till!