Lösningar till tentamen

Analys A,
21-10-14.

1.a) $\arctan k \to \frac{\pi}{2}$ när $k \to \infty$. Eftersom termerna inte går mot noll så kan serien omöjligt konvergera.

b) Integralen är generaliserad i både $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$. Vi delar upp integralen i två delar,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2}{\sqrt{\cos x}}dx = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{\cos x}}dx + \int_{0}^{\pi/2} \frac{x^2}{\sqrt{\cos x}}dx.$$

Eftersom integranden är en jämn funktion så är de båda delarna lika stora. Det räcker därför att undersöka den ena av dom. I närheten av $\frac{\pi}{2}$ gäller att $\cos x \approx \frac{\pi}{2} - x$ (tangentapproximation). Vi jämför därför med funktionen $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x}}$ och noterar att

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{\cos x}}}{\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} x^2 \sqrt{\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Det följer att

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^2}{\sqrt{\cos x}}dx \text{ konv} \;\Leftrightarrow\; \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x}} \text{ konv},$$

enligt jämförelsekriterium II. Den högra integralen är konvergent och kan beräknas med den primitiva funktionen $-2\sqrt{\frac{\pi}{2} - x}$ till $\sqrt{2\pi}$. Vi drar slutsatsen att även den ursprungliga integralen är konvergent.

2.a) Vi undersöker gränsvärdena längs x-axeln och längs linjen $x = y$:

$$\lim_{t \to 0} f(t, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{\cos 0 - 1}{t^4 + 0} = \lim_{t \to 0} 0 = 0.$$

$$\lim_{t \to 0} f(t, t) = \lim_{t \to 0} \frac{\cos t^2 - 1}{t^4 + t^4} = \lim_{t \to 0} \frac{-\frac{1}{2}t^4 + O(t^8)}{t^4 + t^4} = -\frac{1}{4}.$$

där vi i det sista steget har använt MacLaurinutvecklingen $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)$. Då vi får olika gränsvärden längs de båda linjerna saknar funktionen gränsvärde i origo.

b) Med $t = xy$ och samma MacLaurinutveckling som i a) får vi

$$\frac{\cos(x^2y^2) - 1}{x^6 + y^6} = \frac{-\frac{1}{2}x^4y^4 + O(x^8y^8)}{x^6 + y^6}.$$

Med polära koordinater får vi att

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{1}{2} \frac{x^4y^4}{x^6 + y^6} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\cos^4\theta \sin^4\theta}{\cos^6\theta + \sin^6\theta} \to 0,$$

eftersom $r^2 \to 0$ och den trigonometriska faktorn är begränsad. (T ex gäller att täljarens belopp är mindre än 1 och nämnaren är nedåt begränsad av 1/8.) Även den andra delen går mot noll eftersom

$$\left| \frac{O(x^8y^8)}{x^6 + y^6} \right| \le Cr^{10}$$

i någon omgivning av origo, och $Cr^{10} \to 0$. Sammanfattningsvis existerar gränsvärdet och är lika med noll.

3. a) Vi räknar med kedjeregeln

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} - 2\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Ytterligare en derivation ger

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(2\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

På samma sätt beräknas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial u} - 2\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u} - 2\frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$\left(2\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u} - 2\frac{\partial f}{\partial v}\right) =$$

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Från dessa räkningar kan vi läsa av att

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 5\frac{\partial f}{\partial u}$$

och

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 25\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v},$$

dvs vi erhåller ekvationen

$$25\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 5\frac{\partial f}{\partial u} \Leftrightarrow 5\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial f}{\partial u}.$$

b) Vi delar med 5 och sätter $g = \frac{\partial f}{\partial u}$. Då uppfyller g ekvationen

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{5}g \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{1}{5}g = 0.$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn $I = e^{-\frac{1}{5}v}$ kan ekvationen skrivas

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big(e^{-\frac{1}{5}v}g\Big) = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{5}v}g = \phi(u) \Leftrightarrow g = \phi(u)e^{\frac{1}{5}v},$$

för någon godtycklig funktion $\phi(u)$ av u. Om vi går tillbaka till f får vi alltså

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \phi(u)e^{\frac{1}{5}v} \Leftrightarrow f = \Phi(u)e^{\frac{1}{5}v} + \Psi(v),$$

där $\Phi(u)$ är en primitiv till $\phi(u)$ och $\Psi(v)$ är en godtycklig funktion av v. Eftersom den primitiva funktionen till en godtycklig funktion också är godtycklig får vi efter återgång till de ursprungliga variablerna x, y till sist

$$f(x, y) = \Phi(2x + y)e^{\frac{1}{5}(x-2y)} + \Psi(x - 2y),$$

där Φ och Ψ är två godtyckliga två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner.

4.a) Vi beräknar de stationära punkterna:

$$\begin{cases} f'_x &= 2yz - y - z = 0, \\ f'_y &= 2xz - x - z = 0, \\ f'_z &= 2xy - x - y = 0. \end{cases}$$

Om vi subtraherar den andra ekvationen från den första får vi att $(x - y)(2z - 1) = 0$, och på samma sätt får vi att $(y - z)(2x - 1) = 0$ och $(z - x)(2y - 1) = 0$. En möjlighet är uppenbarligen att $x = y = z$. Om detta inte är sant så kommer åtminstone två av faktorerna $x - y, y - z, z - x$ att vara skilda från noll, och därmed måste enligt föregående ekvationer två av talen vara lika med $\frac{1}{2}$. Men detta skulle strida mot de ursprungliga ekvationerna. Vi kan alltså dra slutsatsen att $x = y = z$, och då reduceras alla tre ekvationerna till $2x^2 - 2 = 0$ med de två rötterna $x = 0, 1$. Detta ger de två stationära punkterna $(0, 0, 0)$ och $(1, 1, 1)$.

För att bestämma karaktären av punkten $(0, 0, 0)$ kan vi beräkna andraderivatorna: $f''_{xx}(0, 0) = f''_{yy}(0, 0) = f''_{zz}(0, 0) = 0$ och $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yz}(0, 0) = f''_{zx}(0, 0) = -2$. Detta ger den kvadratiska formen $Q(h, k, l) = -4hk - 4kl - 4lh$ som är indefinit (t ex gäller ju att $Q(1, 1, 0) = -4$ medan $Q(-1, 1, 0) = 4$). $(0, 0, 0)$ är alltså en sadelpunkt.

Motsvarande räkning i punkten $(1, 1, 1)$ ger $f''_{xx}(1, 1) = f''_{yy}(1, 1) = f''_{zz}(1, 1) = 0$ och $f''_{xy}(1, 1) = f''_{yz}(1, 1) = f''_{zx}(1, 1) = 1$. Detta ger den kvadratiska formen $Q(h, k, l) = 2hk + 2kl + 2lh$, som är indefinit av samma skäl som i föregående fall. Även denna punkt är alltså en sadelpunkt.

b) Vi observerar att $\lim_{t\to\pm\infty} f(t, t, t) = \lim_{t\to\pm\infty}(t^3 - 3t^2) = \pm\infty$, vilket visar att $\sup f = \infty$, $\inf f = -\infty$ och att alltså varken maximum eller minimum kan antas.

5.a) Bivillkoret ger en kompakt mängd: den är sluten och $\lim_{x^2+y^2\to\infty}((x^2 + y^2)^2 + 8xy - 12) \geq \lim_{x^2+y^2\to\infty}((x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) - 12) = \lim_{r\to\infty}(r^4 - 4r^2 - 12) = \infty$, så enligt känd sats måste varje nivåkurva vara begränsad. Speciellt gäller detta för kurvan $(x^2+y^2)^2+8xy = 12$. Enligt satsen om extremvärden måste största och minsta värde antas.

b) För att hitta extrempunkterna beräknar vi $\nabla g = (4x(x^2 + y^2) + 8y, 4y(x^2 + y^2) + 8x)$ och $\nabla f = (y, x)$. Vi får

$$0 = \begin{vmatrix} y & x \\ 4x(x^2 + y^2) + 8y & 4y(x^2 + y^2) + 8x \end{vmatrix} =$$

$$4y^2(x^2 + y^2) + 8xy - 4x^2(x^2 + y^2) - 8xy = 4(y^2 - x^2)(x^2 + y^2),$$

vilket ger möjligheterna $x = y$ och $x = -y$.

$x = y$. Insättning i bivillkoret $g(x, y) = 0$ ger $4x^4 + 8x^2 = 12$. Om vi sätter $t = x^2$ så måste alltså t uppfylla ekvationern $t^2 + 2t = 3 \Rightarrow t = x^2 = 1$, vilket ger punkterna $(1, 1)$ och $(-1, -1)$, båda med funktionsvärdet 1.

$x = -y$. Insättning i bivillkoret $g(x, y) = 0$ ger $4x^4 - 8x^2 = 12$. Om vi sätter $t = x^2$ så måste alltså t uppfylla ekvationern $t^2 - 2t = 3 \Rightarrow t = x^2 = 3$, vilket ger punkterna $\pm(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, båda med funktionsvärdena -3.

Sammanfattningsvis blir maximum lika med 1 och minimum lika med -3.

6 & 7. För teorifrågorna hänvisas till kurslitteraturen.

/Martin Tamm/211014/