MATEMATISKA INSTITUTIONEN	Tentamensskrivning i
STOCKHOLMS UNIVERSITET	Linjär algebra, MM5012
Avd. Matematik	7.5 hp
Examinator: Sven Raum	Oktober 26, 2021

15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

1. (a) **(2 poäng)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum. Definiera nollrumet $\mathrm{N}(T)$ och bevisa att $\mathrm{N}(T) \subseteq V$ är ett delrum.

   (b) **(3 poäng)** Låt $\mathrm{P}_4(\mathbb{C})$ vara vektorrumet av alla komplexa polynom av grad högst 4 och låt $T : \mathrm{P}_4(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^3$ vara linjära avbildningen som uppfyller

   $$T(p) = (p(0), p'(2), p''(1)) .$$

   Bestäm $\mathrm{N}(T)$ och $\mathrm{R}(T)$ och hitta en bas till $\mathrm{N}(T)$.

2. (a) **(1 poäng)** Låt $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Definiera när A kallas diagonaliserbar.

   (b) **(3 poäng)** Låt

   $$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

   Bestäm om A är diagonaliserbar. Om så är fallet, bestäm en bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer av A för $\mathbb{R}^3$ samt deras egenvärden.

   (c) **(1 poäng)** Bestäm om matrisen A från sista delen är diagonaliserbar relativ till en ortonormalbas av $\mathbb{R}^3$.

3. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”unitär matris”.

   (b) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”övertriangulär matris”.

   (c) **(3 poäng)** Beräkna QR-uppdelningen av

   $$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1+2i & 0 & -i \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1-2i & 0 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C}) .$$

4. (a) **(1 poäng)** Definiera singulärvärde av en matris $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

   (b) **(4 poäng)** Beräkna singulärvärdesuppdelning av

   $$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

5. (a) **(1 poäng)** Kom ihåg att spåravbildningen $\mathrm{Tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ defineras genom formeln

   $$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} .$$

   Bevisa att $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ gäller för all $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) **(2 poäng)** Låt $V = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$. Bevisa att $V \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ är ett delrum och bestäm en bas för V.

(c) **(2 poäng)** Låt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Vi definierar avbildningen $T : V \to V$ med hjälp av formeln $T(A) = BA - AB$. Bevisa att T är linjär och bestäm dess matrisrepresentation relativ till basen du hittade i del 5b.

6. (a) **(2 poäng)** Bevisa att två ändligdimensionella $\mathbb{F}$-vektorrum V och W är isomorfa om och endast om $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$ gäller.

(b) **(3 poäng)** Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz olikheten.

Skrivningsåterlämning äger rum fredagen 5 november kl. 12:00 utanför sal 15, hus 5. Därefter kan skrivningen hämtas på studentexpeditionen i rum 204.