MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sven Raum

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
Oktober 26, 2021

15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

1. (a) **(2 poäng)** Låt $T : V \to W$ vara en linjär avbildning mellan vektorrum. Definiera nollrumet $\mathrm{N}(T)$ och bevisa att $\mathrm{N}(T) \subseteq V$ är ett delrum.

   (b) **(3 poäng)** Låt $\mathrm{P}_4(\mathbb{C})$ vara vektorrumet av alla komplexa polynom av grad högst 4 och låt $T : \mathrm{P}_4(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^3$ vara linjära avbildningen som uppfyller

$$T(p) = (p(0), p'(2), p''(1)) .$$

   Bestäm $\mathrm{N}(T)$ och $\mathrm{R}(T)$ och hitta en bas till $\mathrm{N}(T)$.

Lösning.

(a) Nolrumet av T är

$$\mathrm{N}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\} .$$

Då

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x) + T(y) = 0 \text{ och} \\ T(cx) &= cT(x) = 0 \end{aligned}$$

för alla $x, y \in \mathrm{N}(T)$ och alla skalär c följer att $\mathrm{N}(T)$ är sluten för addition och skalär multiplikation. Det gäller också att $0 \in \mathrm{N}(T)$. Alltså är $\mathrm{N}(T)$ ett delrum av V.

(b) Matrisrepresentationen för T relativ till standard ordnata baserna av $\mathrm{P}_4(\mathbb{C})$ och $\mathbb{C}^3$ är

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} .$$

Då matrisens kolonner genererar $\mathbb{C}^3$ följer att $\mathrm{R}(T) = \mathbb{C}^3$. Man kan använder Gaussalgoritmen för att finna radekvivalenta matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} .$$

Alltså gäller

$$\mathrm{N}(T) = \{\sum_{i=0}^{4} a_i x^i \mid a_0 = 0,\ a_1 = -8a_4,\ a_2 = -3a_3 - 6a_4\} .$$

Vektorerna $x^4 - 6x^2 - 8x$ och $x^3 - 3x^2$ ligger i $\mathrm{N}(T)$ och är linjär oberoende. Då $\dim \mathrm{N}(T) = 5 - \dim \mathrm{R}(T) = 2$, kan vi drar slutsatsen att dem är en (ordnat) bas av $\mathrm{N}(T)$.

2. (a) **(1 poäng)** Låt $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Definiera när A kallas diagonaliserbar.

   (b) **(3 poäng)** Låt

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Bestäm om A är diagonaliserbar. Om så är fallet, bestäm en bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer av A för $\mathbb{R}^3$ samt deras egenvärden.

   (c) **(1 poäng)** Bestäm om matrisen A från sista delen är diagonaliserbar relativ till en ortonormalbas av $\mathbb{R}^3$.

Lösning.

(a) Matrisen A kallas för diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sådan att SAS^{-1} är en diagonalmatris.

(b) Vi undersöker $B = 2 \cdot A$ i stället för att underlätta beräkningen. Då egenvektorer av A och B är samma och egenvärde multipliceras med 2 är det tillräklig att göa det. Karaktäristiskt polynom av B beräknas som

$$\chi_B(t) = -t^3 + 4t^2 + 4t - 16\,.$$

Pröving av delare av 16 visar att

$$\chi_B(t) = -(t-2)(t+2)(t-4)\,.$$

Då B är av storlek 3×3 och har 3 olika egenvärde, är den diagonaliserbar. Det medför att också A är diagonaliserbar. Egenvektorer av A beräknas nu genom att bestämmer

$$\mathrm{N}(B - 2\mathrm{I}_3) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{N}(B + 2\mathrm{I}_3) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{N}(B - 4\mathrm{I}_3) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså är $(1,0,1)^{\mathrm{t}}, (1,1,0)^{\mathrm{t}}, (0,1,1)^{\mathrm{t}}$ en bas av egenvektorer för A med egenvärde $1, -1$ och 2.

(c) Matrisen A är inte diagonaliserbar relativ till en ortonormalbas av $\mathbb{R}^3$, eftersom dem är inte självadjungerad.

3. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”unitär matris”.
   (b) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”övertriangulär matris”.
   (c) **(3 poäng)** Beräkna QR-uppdelningen av

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1+2i & 0 & -i \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1-2i & 0 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{C})\,.$$

Lösning.

(a) En matris $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ kallas för unitär om $U^*U = \mathrm{I}_n = UU^*$ gäller.

(b) En matris $R \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, där $\mathbb{F}$ är en godtycklig kropp, kallas för övertriangulär om $R_{ij} = 0$ gäller för alla $i > j$.

(c) QR uppdelning beräknas genom att tillämpa Gram-Schmidts metod till basen som består av kolonvektorer $v_1, \dots, v_4$ av A för att hitta ortonormalbasen

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix},$$

som vi kallar för $u_1, \dots, u_4$. Unitära matrisen i QR-uppdelningen är alltså

$$Q = (u_1 \cdots u_4) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

Man noterar hur Gram-Schmit beräknar vektorerna och skriver motsvarande koefficienter i matrisen

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (a) **(1 poäng)** Definiera singulärvärde av en matris $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) **(4 poäng)** Beräkna singulärvärdesuppdelning av

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösning.

(a) Singulärvärden av $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ är positiva tal $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r$, där $r = \mathrm{rank}(A)$ är matrisens rang, tillsammans med $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$, sådan att det finns orthonormalbaser $u_1, \ldots, u_n$ och $v_1, \ldots, v_n$ av $\mathbb{C}^n$ som uppfyller

$$Av_i = \sigma_i u_i$$

för all $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Kommentar: en alternativ definition betrakta bara positiva singulärvärde $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$.

(b) För att bestämmer singulärsvärdeuppdelning av A beräknar man först

$$A^*A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

och sen en ortonormalbas av egenvektorer v_1, v_2, v_3 av A^*A med egenvärde $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_3^2$. Man hittar

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och

$$\sigma_1^2 = 5/4,\ \sigma_2^2 = 2,\ \sigma_3^2 = 0\,.$$

Därefter beränar man bildvektorer Av_1, Av_2 och normaliserar och kompleterar dem för att får en ortonormalbas u_1, u_2, u_3, nämligen

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Samanfattningsvis ger det singulärsvärdeuppdelning

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. (a) **(1 poäng)** Kom ihåg att spåravbildningen $\mathrm{Tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ defineras genom formeln

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}\,.$$

Bevisa att $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ gäller för all $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) **(2 poäng)** Låt $V = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$. Bevisa att $V \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ är ett delrum och bestäm en bas för V.

(c) **(2 poäng)** Låt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi definierar avbildningen $T : V \to V$ med hjälp av formeln $T(A) = BA - AB$. Bevisa att T är linjär och bestäm dess matrisrepresentation relativ till basen du hittade i del 5b.

Lösning.

(a) Det gäller att

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{ki} \right) = \mathrm{Tr}(BA)\,.$$

(b) Man kontrollerar direkt att $0 \in V$ och att det är sluten för addition och skalär multiplikation. Vektorer

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ligger i V och är linjär oberoende. Alltså gäller $3 \leq \dim V < \dim \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) = 4$. Det implicerar att $\dim V = 3$ och att vektorer är en (ordnat) bas av V.

(c) Det är en direkt räkning som visar att T är linjär. Matrisrepresentationen relativ till basen vi hittade i sista delen är

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (a) **(2 poäng)** Bevisa att två ändligdimensionella $\mathbb{F}$-vektorrum V och W är isomorfa om och endast om $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_{\mathbb{F}} W$ gäller.

(b) **(3 poäng)** Formulera och bevisa Cauchy-Schwarz olikheten.

Lösning. Se bok eller föreläsningsanteckningar.

Skrivningsåterlämning äger rum fredagen 5 november kl. 12:00 utanför sal 15, hus 5. Därefter kan skrivningen hämtas på studentexpeditionen i rum 204.