MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik I Analys
Problemlösning, 7.5 hp
16 augusti 2019

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.

1. Undersök extremvärden, konvexitetsegenskaper och asymptoter till funktionen
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 6}.$$
Skissera även grafen till f.

Lösningsförslag:

Eftersom $x^2 + 6 > 0$ för alla rella x är den givna funktionen definierad och kontinuerligt deriverbar på hela reella linjen. Lodräta asymptoter saknas således. Vi har
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1,$$
och vi har en vågrät asymptot $x = 1$.

Vi undersöker extremvärden genom att undersöka f:s derivata. Vi har
$$f'(x) = 14 \frac{x}{(x^2 + 6)^2}$$
och vi ser genast att $f'(x) = 0$ endast för $x = 0$. En teckentabell ger vid handen att $f(0) = -1/6$ är ett lokalt minimum. Då f vidare är växande för $x > 0$ och avtagande för $x < 0$ är detta minimum även globalt f:s minsta värde. Största värde saknas, då $f(x) < 1$ för alla reella x medan $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Vi deriverar igen och får
$$f''(x) = -42 \frac{x^2 - 2}{(x^2 + 6)^3},$$
- vilket avslöjar att f'' uppvisar teckenbyten i $x = \pm\sqrt{2}$. Funktionen f är konvex för $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ och konkav på $-\infty < x < -\sqrt{2}$ och $\sqrt{2} < x < \infty$.

2. Bestäm Maclaurinpolynomet av ordning fyra till funktionen
$$f(x) = x \sin x - x^2 e^{2x}.$$

Lösningsförslag:

Vi använder de kända utvecklingarna
$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$$
$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$
Insättning av dessa ger
$$f(x) = x\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right) - x^2(1+2x+2x^2+\mathcal{O}(x^3)) = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \mathcal{O}(x^6) - x^2 - 2x^3 - 2x^4 + \mathcal{O}(x^5)$$
$$= -2x^3 - \frac{13}{6}x^4 + \mathcal{O}(x^5).$$

Det sökta Taylorpolynomet är alltså

$$p(x) = -2x^3 - \frac{13}{6}x^4.$$

3. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \arctan x dx.$$

Lösningsförslag:

Vi drar oss till minnes integralkalkylens medelvärdessats: om f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ så finns en punkt $x_0 \in [a,b]$ sådan att

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0).$$

Vi tillmpar denna sats med $f = \arctan x$ och $[a,b] = [n, n+1]$ och får då

$$\int_n^{n+1} = (n+1-n)\arctan(x_0) = \arctan(x_0)$$

för något $x_0 \in [n, n+1]$. När nu $n \to \infty$ har vi $x_0 \to \infty$. Alltså följer

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \arctan(x)dx = \lim_{n\to\infty} \arctan(x_0) = \pi,$$

under användning av standardgränsvärdet $\lim_{x_0\to\infty} \arctan(x_0) = \pi$.

4. Bestäm största och minsta värdet till funktionen

$$f(x,y) = x^2 + 2y + y^2$$

på ringområdet

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 2\right\}$$

och ange samtliga punkter där dessa värden antas.

Lösningsförslag:

Vi har att göra med en kontinuerligt deriverbar funktion på ett kompakt område. En känd sats säger oss att maximum och minimum till f kommer att antagas i kritiska punkter eller i randpunkter.

Vi beräknar först gradienten till f:

$$\nabla f = (2x, 2y+2) = 2(x, y+1).$$

Vi har en enda kritisk punkt i $(x,y) = (0,-1)$. I denna punkt har vi $f(0,-1) = -1$.

Vi parametriserar i nšta steg den inre randkomponenten genom att sätta

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta \quad \textit{och} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta.$$

Detta ger oss efter insättning i f

$$F(\theta) = \frac{1}{2} + \sqrt{2}\sin\theta.$$

Funktionen F antar sitt minsta värde i $\theta = -\pi/2$ och sitt största värde i $\theta = \pi/2$, och vi har

$$F(-\pi/2) = \frac{1}{2} - \sqrt{2} \quad \textit{och} \quad F(\pi/2) = \frac{1}{2} + \sqrt{2}.$$

Observera att $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$, vilket kan ses genom kvadrering, och detta medför at $1/2 - \sqrt{2} > -1$.

Vi parametriserar den andra randkomponenten:

$$x = \sqrt{2}\cos\theta, \quad y = \sqrt{2}\sin\theta.$$

Insättning ger funktionen

$$G(\theta) = 2 + 2\sqrt{2}\sin\theta.$$

Denna funktion antar sitt störts värde i $\theta = \pi/2$ och sitt minsta värde i $\theta = -\pi/2$. Vi har

$$G(-\pi/2) = 2 - 2\sqrt{2} = 2(1-\sqrt{2}) \quad \textit{och} \quad G(\pi/2) = 2 + \sqrt{2}.$$

Observera att $1 - \sqrt{2} > -1/2$ så att $2(1-\sqrt{2}) > -1$.

En jämförelse av dessa värden visar att funktionen f antar sitt minsta värde -1 i punkten $(0,-1)$ och sitt största värde $2 + \sqrt{2}$ i punkten $(0, \sqrt{2})$. (Man kan även inse att -1 är ett globalt minimum genom att skriva $f(x,y) = x^2 + (y+1)^2 - 1$.)

5. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy,$$

där

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x^2 + y^2 \le 3\}.$$

Lösningsförslag:

Vi inför polära koordinater genom

$$x = r\cos\theta \quad \textit{och} \quad y = r\sin\theta.$$

Detta transformerar $dxdy$ till $rdrd\theta$. Nya integrationsintervall blir nu $1 \le r \le \sqrt{3}$ samt $-\pi \le \theta \le \pi$. Vi har alltså

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{r=1}^{\sqrt{3}} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \frac{\ln r^2}{r^2} r\,dr\,d\theta = 4\pi \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\ln r}{r}\,dr.$$

Vi har här utnyttjat att integranden kan ses som en radiell funktion. Partiell integration ger vid handen att

$$\int \frac{\ln r}{r}\,dr = \frac{1}{2}(\ln r)^2 + C.$$

Vi sätter till slut in gränser och får

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\ln r}{r}\,dr = [(\ln r)^2]_1^{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2}\ln 3\right)^2 - 0 = \frac{1}{8}\ln^2 3.$$

Detta ger till slut

$$\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy = \frac{\pi}{2}\ln^2 3.$$

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + 4y = 4 + \sin x$$

som uppfyller $y(0) = -1$ och $y'(0) = 1$.

Lösningsförslag: *Vi börjar med att bestm̈ma samtliga lösningar till den homogena ekvationen*

$$y''(x) + 4y(x) = 0.$$

Vi ansätter $y = e^{rx}$, sätter in i differentialekvationen och erhåller den karaktäristiska ekvationen $r^2+4=0$. Denna har rent imaginära rötter, nämligen $r_1 = 2i$ samt $r = -2i$, vilket leder till lösningarna $e^{\pm 2ix}$. Efter omskrivning fås nu den homogena lösningen

$$y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x),$$

där C_1, C_2 är konstanter.

Vi bestämmer nu en partikulärlösning. Låt oss ansätta $A + B \sin x$. Insättning ger oss villkoret

$$4A + 3B \sin x = 4 + \sin x,$$

och vi väljer därför $A = 1$ och $B = 1/3$. Den allmänna lösningen till den givna differentialekvationen är således på formen

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + 1 + \frac{1}{3} \sin x.$$

För att bestämma konstanterna C_1, C_2 implementerar vi begynnelsevillkoren. Från $y(0) = -1$ fås

$$C_1 + 1 = -1$$

varför $C_1 = -2$. Vi deriverar och får

$$y'(x) = -2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x) + \frac{1}{3} \cos x$$

och villkoret $y'(0) = 1$ ger sedan att

$$2C_2 + \frac{1}{3} = 1$$

det vill säga $C_2 = \frac{1}{3}$. Den sökta lösningen är därmed

$$y(x) = -2\cos(2x) + \frac{1}{3} \sin(2x) + 1 + \frac{1}{3} \sin x.$$

Skrivningsåterlämning äger rum fredag 23 augusti klockan 15:00 utanför sal 15 i hus 5.
Därefter kan skrivningen hämtas på studentexpeditionen i rum 204.