MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik I Analys
Problemlösning, 7.5 hp
19 december 2019

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (e^x y - y^2)dxdy$$

där

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 2x\}.$$

Lösningsförslag:

Vi beräknar dubbelintegralen med hjälp av itererade enkelintegraler.

Först beräknar vi

$$\int_0^{2x} (e^x y - y^2)dy = e^x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{2x} - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{2x} = 2e^x x^2 - \frac{8}{3}x^3.$$

Därefter använder vi partiell integration för att evaluera

$$\int_0^2 (2x^2 e^x - \frac{8}{3}x^3)dx = \left[2e^x(x^2-2x+2)\right]_0^2 - \left[\frac{2}{3}x^4\right]_0^2 = 4e^2 - \frac{44}{3}.$$

Således fås

$$\iint_D (e^x y - y^2)dxdy = 4e^2 - \frac{44}{3}.$$

2. Undersök extremvärden, konvexitetsegenskaper och asymptoter till funktionen

$$f(x) = \frac{|x^2-9|}{(x-1)^2}.$$

Skissera även grafen för f.

Lösningsförslag: *Vi noterar att definitionsmängden för f är $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Funktionen är kontinerlig där, och deriverbar for alla x forutom $1, -3$ och 3.*

Polynomdivision ger oss att

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{x-1} - \frac{8}{(x-1)^2} & om\ |x| > 3 \\ -(1 + \frac{2}{x-1} - \frac{8}{(x-1)^2}) & om\ |x| \le 3 \text{ och } x \ne 1. \end{cases} \quad . \tag{1}$$

För att finna eventuella punkter där $f'(x) = 0$ deriverar vi först för $|x| > 3$

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{16}{(x-1)^3} = \frac{-2x+18}{(x-1)^3},$$

och observera att $x = 9$ är den enda stationära punkten i mängden $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Vi noterar också att för $x \in (-\infty, -3) \cup (9, +\infty)$ har vi $f'(x) < 0$, och att för $x \in (3, 9)$ gäller $f'(x) > 0$.

För $|x| < 3$ *och* $x \neq 1$ *får vi att*

$$f'(x) = \frac{2x - 18}{(x-1)^3},$$

vilket betyder att det saknas stationära punkter i den aktuella mängden. Dessutom noterar vi att $f'(x) > 0$ *om* $x \in (-3, 1)$ *och* $f'(x) < 0$ *om* $x \in (1, 3)$

Vi drar slutsatsen att f *är strikt avtagande i* $(-\infty, -3) \cup (1, 3) \cup (9, +\infty)$ *och att* f *är strikt växande i* $(-3, 1) \cup (3, 9)$. *Dessutom får vi att* $x = -3$ *och* $x = 3$ *är lokala minimipunkter, och* $x = 9$ *ger ett lokalt maximum. Punkterna* $x = \pm 3$ *är globala minimipunkter eftersom* $f(x) \geq 0$ *för alla* $x \in D$.

Vi noterar att $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$, *då* $x = 1$ *är en lodrät asymptot och att funktionen saknar global maximum. Vi ser också från* (1) *att*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1,$$

då linjen $y = 1$ *är en vågrät asymptot för* f.

För att undersöka konvexitet hos f *beräknar vi funktionens andraderivata. Vi har att*

$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3} - \frac{48}{(x-1)^4} = 4\frac{x-13}{(x-1)^4}, \qquad \text{för } |x| > 3,$$

och

$$f''(x) = 4\frac{13 - x}{(x-1)^4} \qquad \text{för } x \in (-3, 3) \setminus \{1\}.$$

Vi ser nu att $f''(13) = 0$ *och att* $f''(x) < 0$ *för* $x \in (-\infty, -3) \cup (3, 13)$ *medan* $f''(x) > 0$ *för* $x > 13$ *eller* $x \in (-3, 3) \setminus \{1\}$. *Således är* f *konkav på* $(-\infty, -3) \cup (3, 13)$ *och konvex för* $x > 13$ *och* $x \in (-3, 3) \setminus \{1\}$.

3. Bestäm Taylorpolynomet av ordning tre kring punkten $x = 1$ till funktionen

$$f(x) = xe^x + 1.$$

Lösningsförslag:

Vi beräknar först successiva derivator för den givna funktionen:

$$f'(x) = xe^x + e^x$$

$$f''(x) = xe^x + 2e^x.$$

$$f''(x) = xe^x + 3e^x.$$

Evaluering i $x = 1$ *ger*

$$f(1) = e + 1$$

$$f'(1) = 2e$$

$$f''(1) = 3e$$

$$f'''(1) = 4e.$$

Insättning i Taylors formel för Taylorpolynom av grad $n3$ *ger*

$$t_3((x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

ger

$$t_3(x) = e + 1 + 2e(x-1) + \frac{3}{2}e(x-1)^2 + \frac{2}{3}e(x-1)^3.$$

4. Bestäm största och minsta värdet till funktionen

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1$$

på cirkelskivan

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 9\}$$

och ange i vilka punkter dessa värden antas.

Lösningsförslag:

Vi noterar först att den givna funktionen f är kontinuerligt deriverbar i hela $\mathbb{R}^2$. Således kommer maximum och minimum för f på cirkelskivan att antas i punkter där gradienten till f är noll eller i randpunkter.

Vi beräknar först

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y$$

samt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y.$$

Derivatan med avseende på x är noll om $2x = y$ medan derivatan med avseende på y är noll om $x = -2y$. Dessa villkor är uppfyllda precis när $x = y = 0$. Vi har $f(0,0) = -1$.

Randen till cirkelskivan kan parametriseras som $x = 3\cos t$ och $y = 3\sin t$. Vi har

$$f(x(t), y(t)) = 8 - 9\sin(t)\cos(t).$$

Med hjälp av en trigonometrisk identitet får vi

$$f(x(t), y(t)) = 8 - \frac{9}{2}\sin(2t)$$

Vi ser nu att f största värde på randen är $25/2$, vilket antas när $t = 3\pi/4$ eller $t = 7\pi/4$, det vill säga i $(\mp 3/\sqrt{2}, \pm 3/\sqrt{2})$. Minsta värdet på randen är $7/2$, vilket är större än f:s värde i origo.

Sammanfattningsvis antar f sitt största värde $25/2$ i $(\pm 3/\sqrt{2}, \mp 3/\sqrt{2})$ och sitt minsta värde $f(0,0) = -1$.

5. Undersök huruvida integralerna

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x \cos x\right) dx$$

och

$$\int_2^3 \frac{2}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

är generaliserade. Om någon eller några av integralerna är ändliga, skall deras värden beräknas.

Lösningsförslag:

Vi behandlar inledningsvis den första integralen. Då $\cos x \neq 0$ för $0 \leq \frac{\pi}{6}$ är den första integranden kontinuerlig på hela intervallet. Den andra integranden är kontinuerlig för alla reella x.

Vi observerar sedan att

$$-\ln(\cos x)$$

är en primitiv funktion till $\sin x / \cos x$ och eftersom $2\sin x \cos x = (\sin^2 x)'$ är $\frac{1}{2}\sin^2 x$ en primitiv funktion till den andra integranden. Vi får således

$$\int_0^{\pi/6} (\frac{\sin x}{\cos x} + \sin x \cos x) dx = \left[-\ln(\cos x) - \frac{1}{2}\sin^2(x)\right]_0^{\pi/6} = \frac{1}{8} + \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3,$$

där vi har utnyttjat att $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ *och* $\sin(\pi/6) = 1/2$.

För att analysera den andra integralen noterar vi inledningsvis att integranden $2/(x-2)^{3/2}$ *är obegränsad i varje omgivning av* $x = 2$. *Vi undersöker därför integralerna*

$$\int_{2+\epsilon}^{2} \frac{2}{(x-2)^{3/2}}dx = \left[-\frac{4}{\sqrt{x-2}}\right]_{2+\epsilon}^{3} = \frac{4}{\sqrt{\epsilon}} - 4.$$

Eftersom $\lim_{\epsilon\to 0}(\frac{4}{\epsilon} - 4)$ *ej existerar ändligt, kan vi dra slutsatsen att inte heller*

$$\int_{2}^{3} \frac{2}{(x-2)^{3/2}}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{2+\epsilon}^{3} \frac{2}{(x-2)^{3/2}}dx$$

är konvergent.

6. a) Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2}$$

som uppfyller $y(0) = -2$.

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 2y' + 2y = 1.$$

Lösningsförslag:

För att lösa den första differentialekvationen använder vi metoden med integrerande faktor. Vi multiplicerar bägge leden i differentialekvationen med $e^{-\int 2x dx} = e^{-x^2}$ *och erhåller*

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = 2x.$$

Med hjälp av produktregeln fås nu

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}y) = 2x$$

vilket efter integration ger

$$e^{-x^2}y(x) = x^2 + C$$

där C *är en konstant. Alltså fås*

$$y(x) = x^2e^{x^2} + Ce^{x^2}.$$

Vi har vidare $y(0) = C$, *och vi får då från begynnelsevillkoret att* $C = -2$. *Därmed fås den sökta lösningen*

$$y(x) = (x^2 - 2)e^{x^2}.$$

Vi löser nu den andra differentialekvationen. Först underöker vi den homogena ekvationen $y'' - 2y' + 2y = 0$. *Denna har den karaktäristiska ekvationen*

$$r^2 - 2r + 2 = 0.$$

Med hjälp av kvadratkomplettering får vi rötterna $r_1 = 1 - i$ *och* $r_2 = 1 + i$. *Dessa ger upphov till den allmänna lösningen*

$$y_h(x) = C_1e^x\sin(x) + C_2e^x\cos(x).$$

Vi har vidare partikulärlösningen $y_p(x) = \frac{1}{2}$, *vilket kan inses genom ansättning av* $y = A$ *och insättning i differentialekvationen. Vi får således*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x\sin x + C_2e^x\cos x + \frac{1}{2}.$$

Skrivningsåterlämning äger rum torsdagen 30 januari 2020 klockan 15:00 utanför sal 15 i hus 5.
Därefter kan skrivningen hämtas på studentexpeditionen i rum 204.