MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: A. Sola

Tentamensskrivning i
Matematik I Analys
Problemlösning, 7.5 hp
9 januari 2019

Inga hjälpmedel tillåtna. Varje uppgift är värd 5 poäng och 15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.

1. Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

och

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)-x^3-x^4}{x^4}.$$

Lösning: *Vi drar oss till minnes standardgränsvärdet*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Genom att skriva

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}}$$

erhåller vi från detta att

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

För att beräkna det andra gränsvärdet använder vi standardutvecklingen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$$

vilket ger oss

$$\sin(x^3) = x^3 + \mathcal{O}(x^9).$$

Vi har nu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)-x^3-x^4}{x^4} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+\mathcal{O}(x^9)-x^3-x^4}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^4+\mathcal{O}(x^9)}{x^4} = -1.$$

2. Undersök extremvärden, konvexitetsegenskaper och asymptoter till funktionen

$$f(x) = |x|e^{1-|x|} - 1.$$

Skissera även grafen till f.

Lösning:

Vi observerar att den givna funktionen f är symmetrisk med avseende på y-axeln. Vi studerar därfor f för $x > 0$. Notera att f är kontinuerlig på $\mathbb{R}$ men ej deriverbar i origo.

När x är positivt har vi

$$f(x) = xe^{1-x} - 1.$$

Vi söker först punkter där $f'(x) = 0$. Vi har

$$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x},$$

och då exponentialfunktionen är icke-negativ på $\mathbb{R}$ är $f'(x) = 0$ precis när faktorn $1 - x$ är noll, det vill säga, i $x = 1$. Vi ser vidare att $f'(x) > 0$ när $x < 1$ och att $f'(x) < 0$ när $x > 0$. Således har f lokalt maximum i punkten $x = 1$, och vi har $f(1) = 0$. Symmetri ger vid handen att f även har lokalt maximum i $x = -1$.

För att undersöka konvexitetsegenskaper hos f beräknar vi andraderivatan

$$f''(x) = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} = (x-2)e^{1-x} \quad x > 0.$$

Vi har $f''(x) > 0$ för $x > 2$ och $f''(x) < 0$ när $x < 2$. Alltså är f konvex för $x > 2$ och konkav när $0 < x < 2$. Symmetri ger vidare att f är konkav för $-2 < x < 0$ och konvex för $x < -2$.

Från standardgränsvärdet $\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ får vi $\lim_{x\to\infty} xe^{1-x} - 1 = \lim_{x\to\infty} exe^{-x} - 1 = -1$. På grund av symmetri har vi även $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Således är $y(x) = -1$ en vågrät asymptot till $f(x)$.

Sammanfattningsvis antar f ett största värde, nämligen 0, i de lokala maximipunkterna $x = \pm 1$, samt sitt minsta värde -1 i punkten $x = 0$, där f ej är deriverbar. Funktionen är konvex för $x < -2$ och för $x > 2$ och konkav på intervallen $-2 < x < 0$ och $0 < x < 2$. Slutligen har f en vågrät asymptot $y = -1$.

3. Bestäm längden av kurvsegmentet

$$y(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2, \quad 0 \le x \le 2.$$

Lösning:

4. Bestäm största och minsta värdet till funktionen

$$f(x,y) = x^2 - y + \ln(1 + |y|)$$

på kvadraten

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}.$$

Lösning:

5. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x^2 \sin(x^2 + y^2) dxdx$$

där

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > 0 \quad \text{och} \quad 0 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

Lösning:

Då både en faktor i integranden och integrationsområde uppvisar cirkulär symmetri genomför vi ett variablebyte och använder polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Integration genomförs i polära koordinater över $0 \le r \le 2$ och $0 \le \theta \le \pi$, och med skalfaktorn r.

Vi har alltså

$$\iint_D x^2 \sin(x^2 + y^2) dxdy = \int_0^2 \int_0^\pi r^2 \cos^2\theta \sin r^2 \, r dr d\theta.$$

Vi observerar att integralen till höger kan delas upp som produkten av två envariabelintegraler:

$$\left(\int_0^2 r^3 \sin^2 r dr\right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin^2(\theta) d\theta\right).$$

Vi drar oss till minnes identiteten $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$ *och får att*

$$\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right) d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\cos(2\theta)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

I den andra integralen genomför vi variabelbytet $t = r^2$. *Vi får* $dt = 2rdr$ *och gränserna* $0 \leq t \leq 4$. *Således fås*

$$\int_0^2 r^3 \sin(r^2) dr = \int_0^2 r^2 \sin(r^2)\, r dr = \frac{1}{2}\int_0^4 t \sin t dt.$$

Slutligen ger partiell integration att

$$\int_0^4 t \sin t dt = [-t\cos t]_0^4 + \int_0^4 \cos t dt = -4\cos 4 + \sin 4.$$

Vi multiplicerar till slut ihop de två envariabelintegralerna och får

$$\iint_D x^2 \sin(x^2 + y^2) dx dx = \frac{\pi}{4}(\sin 4 - 4\cos 4).$$

6. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + 2y' + 2y = x$$

som uppfyller $y(0) = 1$ och $y'(0) = -1$.

Lösning: *Vi betraktar först den homogena ekvationen*

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Vi ansätter $y(x) = e^{rx}$ *och får efter derivering och insättning den karaktäristiska ekvationen*

$$r^2 + 2r + 2 = 0.$$

Vi kvadratkompletterar

$$r^2 + 2r + 2 = (r+1)^2 - 1 + 2 = (r+1)^2 + 1$$

och drar slutsatsen att den aktuella andragradsekvationen har två komplexkonjugerade rötter, nämligen

$$r_1 = -1 + i \quad \textit{och} \quad r_2 = -1 - i.$$

Detta ger oss en allmän lösning till den homogena ekvationen,

$$y_h(x) = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x.$$

Vi bestämmer i nästa steg en partikulärlösning. Först ansätter vi

$$y_p(x) = Ax + B.$$

Vi deriverar en och två gånger,

$$y_p'(x) = A, \quad y''(x) = 0.$$

Insättning i differentialekvationens vänsterled ger

$$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = 2A + 2(Ax + B) = 2Ax + 2(A + B).$$

Jämförelse med högerledet x ger oss genast $A = 1/2$ och då det givna högerledet saknar konstantterm måste $A + B = 0$, vilket ger $B = -1/2$.

Den allmänna lösningen till den givna differentialekvationen är således

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + \frac{1}{2}(x - 1).$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger oss efter insättning i vänsterledet att

$$C_1 - \frac{1}{2} = 1,$$

vilket medför att $C_1 = \frac{3}{2}$. Vi deriverar y och får

$$y'(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} \cos x - \frac{3}{2}e^{-x} \sin x - C_2 e^{-x} \sin x + C_2 e^{-x} \cos x + \frac{1}{2}.$$

Vi implementerar nu det andra begynnelsevilkoret, $y'(0) = -1$, vilket ger kravet

$$-\frac{3}{2} + C_2 + \frac{1}{2} = -1,$$

och således fås $C_2 = 0$.

Vi har nu bestämt lösningen till det givna beynnelsevärdesproblemet:

$$y(x) = \frac{1}{2}(3e^{-x} \cos x + x - 1).$$

Skrivningsåterlämning äger rum torsdag 17 januari klockan 15:00 utanför sal 15 i hus 5.
Därefter kan skrivningen hämtas på studentexpeditionen i rum 204.