STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
MM2002 Matematik för naturvetenskaper I
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
2021-12-20

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

---

1. **(2+3 p.)** Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{x^2+1}\right), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}.$$

Lösning: För det första gränsvärdet kan vi förlänga med konjugatkvantiteten och får

$$3x-\sqrt{x^2+1} = \frac{9x^2-(x^2+1)}{3x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{8x^2-1}{3x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{8x-1/x}{3+\sqrt{1+1/x^2}}.$$

När x går mot $+\infty$ då ser man nu att nämnaren går mot 4 medan täljaren går mot $+\infty$, so att vi får

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{x^2+1}\right) = +\infty.$$

Det andra gränsvärdet kan man t.ex. bestämma med hjälp av Taylorutvecklingen för sin,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + B(x)x^7$$

där B är en funktion som är begränsad nära $x = 0$. Därför har vi

$$\sin^2(x) = x^2 - 2x\frac{x^3}{6} + \widetilde{B}(x)x^6.$$

Själva uttrycket kan alltså skrivas som

$$\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = \frac{x^2-\frac{x^4}{3}+\widetilde{B}(x)x^6-x^2}{x^4} = \frac{-\frac{1}{3}+\widetilde{B}(x)x^2}{1},$$

vilket ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

2. **(5 p.)** Finn alla lösningar till de linjära ekvationssystemen

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 3x_2 - x_3 - x_4 &= -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 &= 4 \end{aligned} \qquad \text{och} \qquad \begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 3x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Lösning: Vi använder Gausselimination på båda system samtidigt. Detta ger

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Den sista raden ger att det första systemet inte har någon lösning. Det andra systemet har oändligt många lösningar. Vi sätter $s = x_3$ och $t = x_4$ och får då

$$x_2 = \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}t,$$
$$x_1 = 1 + 3s - 2t.$$

Därför är den generella lösningen till andra systemet given av

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \big(1 + 3s - 2t, s/3 + t/3, s, t\big)$$

för godtyckliga reella s, t.

3. **(2+2+1 p.)** Låt $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$.

   (a) Finn alla lokala minimi- och maximipunkter till f.

   (b) Bestäm alla asymptoter till grafen av f samt gränsvärden vid en eventuell lodrät asymptot.

   (c) Skissa grafen av f.

Lösning: (a) För denna uppgift kan vi behöva den första och andra derivatan av f. Med kvotregeln får vi

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2-1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

och

$$f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - (x^2+4x+1)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{6}{(x+2)^3}.$$

Möjliga lokala minimi- och maximipunkter är de stationära punkterna, d.v.s. nollställena av f'. Vi vill lösa $f'(x) = 0$ och får $x^2 + 4x + 1 = 0$, vilket kan lösas med pq-formeln. Resultatet blir de två stationära punkterna $-2 \pm \sqrt{3}$. Vi ser att $f''(x)$ är negativ för alla $x < -2$ och positiv för alla $x > -2$. Eftersom $-2 - \sqrt{3} < -2 < -2 + \sqrt{3}$ följer det

$$f''(-2-\sqrt{3}) < 0 \qquad \text{och} \qquad f''(-2+\sqrt{3}) > 0.$$

Detta betyder att $-2-\sqrt{3}$ är en lokal maximipunkt och $-2+\sqrt{3}$ är en lokal minimipunkt för f.

(b) I $x = -2$ blir nämnaren noll men inte täljaren, därför har funktionen en lodrät asymptot där. Dessutom är $f(x)$ i en omgivning negativ till vänster om $x = -2$ och positiv till höger, vilket innebär

$$\lim_{x \to -2-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -2+} f(x) = +\infty.$$

Asymptoter vid $\pm\infty$: Polynomdividerar man så får man

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2} = x - 2 + \frac{3}{x + 2}.$$

Eftersom den sista kvoten går mot noll när x går mot $\pm\infty$ så har f asymptoten $x - 2$ för både $x \to \pm\infty$.

(c) Skissen ska tillverkas med hjälp av resultaten av (a) och (b).

4. **(5 p.)** Bestäm största och minsta värdet för funktionen $f(x, y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 2$ på det område i planet som beskrivs av olikheterna $x \geq 0$ samt $x^2 + y^2 \leq 4$.

Lösning: Det specificerade området är den högre halvcirkelskivan med radie 2 och center i origot. Vi letar först efter stationära punkter i området. De partiella derivatorna ges av

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y,$$

och båda blir noll samtidigt endast om $y = 0$ och $x = 1$. Punkten $(1, 0)$ befinner sig inom halvcirkeln och är därför en kandidatpunkt för funktionens min eller max på halvcirkelskivan.

Näst tittar vi på randen som består av två delar. Den horisontella delen ges av $x = 0$, $-2 \leq y \leq 2$. Där är

$$f(x, y) = g(y) = 2y^2 + 2, \quad -2 \leq y \leq 2.$$

Denna parabel blir minimal i $y = 0$ och maximal i randpunkterna $y = \pm 2$. Detta ger oss tre till kandidatpunkter, nämligen $(0, 0), (0, -2)$ samt $(0, 2)$.

Själva halvcirkeln kan parametriseras som $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ och funktionen f beskrivs där alltså av

$$f(x, y) = h(t) = 4\cos^2 t - 4\cos t + 8\sin^2 t + 2, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Deriverar vi h så får vi

$$h'(t) = -8\cos t \sin t + 4\sin t + 16\sin t \cos t = 8\sin t(\cos t + 1/2).$$

Detta uttryck blir noll inom intervallet endast när $t = 0$ (observera att $\cos t$ aldrig blir negativ där), vilket motsvarar $(x, y) = (2, 0)$ (halvcirkelns mittpunkt).

Funktionsvärdena på kandidatpunkterna är

$$\begin{aligned} f(1, 0) &= 1, \\ f(0, 0) &= 2, \\ f(0, 2) &= 10, \\ f(0, -2) &= 10, \\ f(2, 0) &= 2. \end{aligned}$$

Därför är funktionens största värde på området lika med 10 och det minsta värdet lika med 1.

5. **(3+1 p.)** I en regelbunden sexhörning betecknas hörnen A, B, C, D, E, F (i ordning moturs). Vektorerna $e_1 = \overline{AB}$ och $e_2 = \overline{AF}$ utgör tillsammans en bas i planet, och detsamma gäller för vektorerna $f_1 = \overline{AC}$ och $f_2 = \overline{AE}$.

   (a) Uttryck vektorerna f_1, f_2 i basen e_1, e_2.

   (b) Om vektorn u har koordinater $(2, 3)$ i basen f_1, f_2, vilka koordinater har då u i basen e_1, e_2?

Lösning: (a) Ritar man sexhörningen och betecknar dess mittpunkt med M och observerar att $\overline{FM} = \overline{MC} = \overline{AB}$ på grund av symmetri så är

$$f_1 = \overline{AF} + \overline{FM} + \overline{MC} = \overline{AF} + 2\overline{AB} = e_2 + 2e_1.$$

Därför har vi

$$f_2 = f_1 + \overline{CD} + \overline{DE} = e_2 + 2e_1 + e_2 - e_1 = e_1 + 2e_2.$$

(b) Att u har koordinater $(2, 3)$ i basen f_1, f_2 betyder att

$$u = 2f_1 + 3f_2 = 2e_2 + 4e_1 + 3e_1 + 6e_2 = 7e_1 + 8e_2.$$

Därför är dess koordinater i basen e_1, e_2 lika med $(7, 8)$.

6. **(2+4 p.)**

   (a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y' = xy^2 + x$.

   (b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $2y'' - 3y' = e^{3x}$ som uppfyller villkoren $y(0) = 0$ samt $y(1) = e^3/9$.

Lösning: (a) Ekvationen kan skrivas som $y' = x(1 + y^2)$, vilket är ekvivalent med

$$\int \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x.$$

Integrerar man så blir det

$$\arctan y = \frac{1}{2}x^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Därför är

$$y = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)$$

differentialekvationens allmänna lösning.

(b) Denna differentialekvation av andra ordning är linjär och dess karakteristiska ekvation är

$$2\lambda^2 - 3\lambda = 0,$$

vilket löses av $\lambda = 0$ och $\lambda = 3/2$. Den motsvarande homogena differentialekvationen har alltså den allmänna lösningen

$$y_{\mathrm{h}}(x) = A + Be^{3x/2}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Den inhomogena ekationen löser vi med ansatsen $y_{\mathrm{p}}(x) = Ce^{3x}$. Stoppar vi in det i differentialekvationen så vill vi bestämma C sådant att

$$e^{3x} = 2y_{\mathrm{p}}''(x) - 2y_{\mathrm{p}}'(x) = 9Ce^{3x},$$

vilket ger $C = 1/9$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är därför

$$y(x) = A + Be^{3x/2} + \frac{1}{9}e^{3x}.$$

Villkoren $y(0) = 0$ och $y(1) = e^3/9$ betyder då

$$0 = A + B + \frac{1}{9}, \qquad e^3/9 = A + Be^{3/2} + \frac{1}{9}e^3.$$

Den enda lösningen till detta ekvationssystem är

$$A = -\frac{e^{3/2}}{9(e^{3/2}-1)}, \qquad B = \frac{1}{9(e^{3/2}-1)}.$$

Problemets entydiga lösning är alltså

$$y(x) = -\frac{e^{3/2}}{9(e^{3/2}-1)} + \frac{1}{9(e^{3/2}-1)}e^{3x/2} + \frac{1}{9}e^{3x}.$$