MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avdelning Matematik
Examinator: Pavel Kurasov

Lösningar till tentamen i
Analys B, 7.5 hp
den 21 augusti 2019

Problemdel

1 (a)

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+2)(1+k^2)}{(1+(k+1)^2)(k+1)} \to 1 \quad \Rightarrow R = 1$$

(b) Vi har samma kvot som i (a)

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to 1 \quad \Rightarrow R = 1$$

(c)

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{5}{k+1} \to 0 \Rightarrow R = \infty.$$

(d)

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^2(1+e^{-k})}{(1+e^{-(k+1)})k^2} \to 1 \Rightarrow R = 1.$$

(e)

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{7^{k+1}}{7^k} \to 7 \Rightarrow R = \frac{1}{7}.$$

2 Låt oss beteckna med K kroppen som ligger mellan ytorna. Studenten vill kolla att

$$\int\int_{\partial K} \vec{F} \cdot \vec{N} ds = \int\int\int_K \operatorname{div} \vec{F} dxdydz, \tag{1}$$

där $\vec{N}$ är normalen till randen $\partial K = Y_1 \cup Y_2$.
Vi beräknar alla integraler var för sig:
Ytan Y_1 kan parameteriseras som $(x, y, x^2 + y^2)$ med normalvektorn $\vec{N} = (2x, 2y, -1)$.

$$\begin{aligned}
\int_{Y_1} \vec{F} \cdot \vec{N} ds &= \int\int_{x^2+y^2\le 1} (x^2, y^2, (x^2+y^2)^2) \cdot (2x, 2y, -1) dxdy \\
&= -\int\int_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)^2 dxdy \\
&= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 dr d\phi = -\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

där vi pga symmetriskäll ignorerar integraler av $2x^3$ och $2y^3$.

$$\int\int_{Y_2} \vec{F} \cdot \vec{N} ds = \int_0^{2\pi} \int_/ =^1 rdtrd\phi = \pi.$$

$$\begin{aligned}
\int\int\int_K \operatorname{div} \vec{F} dxdydz &= 2\int\int\int_K (x+y+z) dxdydz \\
&= 2\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} (r\cos\phi r \sin\phi + z) r dr d\phi \Big) dz \\
&= 2\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} z\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{z}} d\phi \Big) dz \\
&= 2\int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Formeln (1) stämmer.

3 Vi försöker hitta en potential till vektorfältet

$$\vec{F} = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$$

eftersom

$$\text{rot}\, \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Man kan välja potenntial lika med

$$U(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3 - xyz.$$

Insättningsformeln ger:

$$\int_\gamma (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz = U(1, 0, h) - U(1, 0, 0) = \frac{1}{3} + \frac{h^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{h^3}{3}.$$

4 a) Integranden är en meromorf funktion med singulärtiteterna $z = \pm 2i$. Bara punkten $z = 2i$ ligger inom Γ. Vi får

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{(z - 2i)(z + 2i)} dz = 2\pi i \Big(\frac{e^{iz}}{z + 2i} \Big)|_{z=2i} = 2\pi i \frac{e^{-2}}{4i} = \frac{\pi}{2e^2}.$$

b) VI får först:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 4} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 4} dx$$

Intervallet $(-R, R)$ kan kompletteras med en halvcirkel C_R i den övre halvplanet. Vi får:

$$\Big| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 4} dz \Big| \leq \pi \frac{R}{R^2 - 4} \to_{R \to \infty} 0.$$

Med hjälp av a) får vi:

$$\underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{\cos z}{z^2 + 4} dz + \int_{C_R} \frac{\cos z}{z^2 + 4} dz}_{= \frac{\pi}{2e^2}} \to_{R \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx + 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi}{2e^2}.$$