STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
MM2002 Matematik för naturvetenskaper I
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
2022-01-20

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

---

1. **(2+3 p.)** Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x^2+\frac{3}{2}x-1}{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}.$$

Lösning: Polynomen i täljare och nämnare har båda 1/2 som nollställe, därför kan de faktoriseras, t.ex. genom polynomdivision. Vi får

$$\frac{x^2+\frac{3}{2}x-1}{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x+2)}{(x-\frac{1}{2})(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$$

för $x \neq \frac{1}{2}$, och därför

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x^2+\frac{3}{2}x-1}{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(x-\frac{1}{2})(x+2)}{(x-\frac{1}{2})(x-1)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x+2}{x-1} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = -5.$$

Det andra gränsvärdet kan beräknas med Taylorutveckling eller kan reduceras till standardgränsvärden på följande sätt:

$$\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} = \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}},$$

och gränsvärden av täljaren och nämnaren kan beräknas separat. Med substitionen $t = x^2$ har vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1.$$

Dessutom

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Därför får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

2. **(5 p.)** Bestäm den rotationsvolym som uppstår då funktionsgrafen

$$y = e^x\sqrt{1+x}, \quad -1 \le x \le 1,$$

roteras runt x-axeln.

Lösning: Funktionen $f(x) = e^x\sqrt{1+x}$ är icke-negativ för $-1 \le x \le 1$. Rotationsvolymen ges därför av

$$V = \pi \int_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} e^{2x}(1+x)\mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} e^{2x}\mathrm{d}x + \pi \int_{-1}^{1} xe^{2x}\mathrm{d}x.$$

Den första integralen kan beräknas direkt,

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \sinh 2.$$

Den andra kan bestämmas med hjälp av partiell integration:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} xe^{2x}\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{2x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^2 + e^{-2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \cosh 2 - \frac{1}{2}\sinh 2.\end{aligned}$$

Därför blir resultatet

$$V = \pi\left(\cosh 2 + \frac{1}{2}\sinh 2\right).$$

3. **(2+2+1 p.)** Låt $f(x) = (x^2 - x - 1)e^{-x}$.
   (a) Finn alla lokala minimi- och maximipunkter till f.
   (b) Undersök funktionens beteende när $x \to \pm\infty$.
   (c) Skissa grafen av f.

Lösning: (a) Funktionen är definierad och deriverbar på hela reella axeln. Som derivator har vi

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2x-1)e^{-x} - (x^2 - x - 1)e^{-x} = (-x^2 + 3x)e^{-x}, \\ f''(x) &= (-2x+3)e^{-x} - (-x^2 + 3x)e^{-x} = (x^2 - 5x + 3)e^{-x}.\end{aligned}$$

De enda kandidater för min- och maxpunkter är alltså förstaderivatans nollställen, dvs. lösningarna till

$$0 = f'(x) = -x(x-3)e^{-x},$$

alltså $x = 0$ samt $x = 3$. Genom andraderivatan ser vi

$$f''(0) = 3 > 0, \qquad f''(3) = -3e^{-3} < 0.$$

Därför har f ett lokalt minimum i $x = 0$ och ett lokalt maximum i $x = 3$.

(b) För $x \to -\infty$ har vi $x^2 - x - 1 \to +\infty$ samt $e^{-x} \to +\infty$ och därför

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

När $x \to +\infty$ så är för alla tillräckligt stora x

$$0 < f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{e^x} < \frac{x^2}{e^x} \to 0$$

(standardgränsvärde / exponentialfunktionen växer snabbare än varje polynom), alltså

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

(c) Skissen ska tillverkas med hjälp av resultaten av (a) och (b).

4. **(5 p.)** Bestäm minimum och maximum av funktionen

$$f(x, y) = 3x - 4x^3 + 12xy$$

på det område i planet som begränsas av linjerna $x = 0$, $y = 0$ och $y = 1 - x$.

Lösning: Vi hittar stationära punkter genom att hitta gemensamma nollställen av

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 - 12x^2 + 12y \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 12x.$$

Ekvationen $12x = 0$ ger direkt $x = 0$. Vi stoppar in det i $3 - 12x^2 + 12y = 0$ och får ekvationen $3 + 12y = 0$, som har en enda lösning, nämligen $y = -1/4$. Vår enda kritiska punkt är alltså $(0, -1/4)$, men den ligger inte i triangeln.

Randen består av tre delar. Den första sidan beskrivs genom $y = 0$ och $0 \leq x \leq 1$. Där har funktionen formen $g_1(x) = f(x, 0) = 3x - 4x^3$ och har derivatan $g_1'(x) = 3 - 12x^2$. Nollställena till g_1' är då $x = \pm 1/2$. Detta ger den möjlig max- eller minpunkt $(1/2, 0)$. (Punkten med x-koordinaten $-1/2$ ligger inte inom området.)

På sidan med $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$ ges f av $g_2(y) = f(0, y) = 0$, vilket betyder att det inte finns eventuella extrempunkter i kantens inre.

Sidan som inte är parallell till någon axel beskrivs genom $0 \leq x \leq 1$ och $y = 1 - x$. Funktionen f har där formen

$$g_3(x) = f(x, 1 - x) = 3x - 4x^3 + 12x(1 - x) = -4x^3 - 12x^2 + 15x.$$

Denna funktion är inte monoton för $0 \leq x \leq 1$. Därför deriverar vi g_3 för att hitta möjliga minimi- och maximipunkter. Vi har

$$g_3'(x) = -12x^2 - 24x + 15,$$

vilket (med pq-formeln) är noll om $x = -5/2$ eller $x = 1/2$. En punkt med negativ x-koordinat kan aldrig ligga i vårt område, alltså får vi en till möjlig extrempunkt, nämligen $(1/2, 1/2)$.

Dessutom är hörnen $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$ möjliga extrempunkter. Vi beräknar nu funktionsvärdena på alla punkter som vi vick fram:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, \\ f(1/2, 0) &= 1, \\ f(1/2, 1/2) &= 4, \\ f(1, 0) &= -1, \\ f(0, 1) &= 0. \end{aligned}$$

Största av värdena är 4 och minsta värdet är -1. Därför är 4 maximum och -1 minimum av f på triangeln.

5. **(2+3 p.)** I en ON-bas $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ låt u, v, w vara vektorer i rummet med koordinater $u_{\mathbb{B}} = (-1, 0, 2), v_{\mathbb{B}} = (t, 1, -2)$ och $w_{\mathbb{B}} = (3, 3, 6)$.

   (a) För varje t beräkna volymen av den parallellepiped som u, v, w spänner upp.

   (b) För vilka värden på t utgör vektorerna u, v, w en bas i rummet? I fallet $t = 4$ bestäm vektorn e_1:s koordinater i denna bas.

Lösning: (a) Volymen ges av absolutbeloppet av determinanten

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ t & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = -6 + 0 + 6t - 6 - 6 - 0 = 6t - 18 = 6(t - 3).$$

Däför har vi

$$V = 6|t - 3|$$

som volym.

(b) u, v, w utgör en bas i rummet om och endast om determinanten ovan är olika noll, alltså om och endast om $t \neq 3$. För $t = 4$ handlar det alltså om en bas. I denna bas har vi

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså koordinaterna till e_1, e_2, e_3 genom att invertera matrisen. Med hjälp av Gauss-Jordan-eliminering får man

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{3} \\ -5 & -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$e_1 = 2u + v - \frac{1}{3}w,$$

i andra ord, e_1 har koordinater $(2, 1, -1/3)$ i denna bas.

6. **(2+3 p.)**

   (a) Bestäm alla reella tal λ sådana att $e^{\lambda x}$ löser differentialekvationen $y'' - 5y' + 6y = 0$.

   (b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = e^x(y + y^2)$ som uppfyller $y(1) = 1$.

Lösning: (a) Stoppar man in $y = e^{\lambda x}$ i differentialekvationen och beräknar derivatorna kommer man fram till den karakteristiska ekvationen $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Den kan lösas med *pq*-formeln,

$$\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \begin{cases} 2, \\ 3. \end{cases}$$

Alltså är $e^{\lambda x}$ lösning till differentialekvationen om och endast om $\lambda = 2$ eller $\lambda = 3$.

(b) Denna DE är separabel och därför ekvivalent med

$$\int \frac{1}{y+y^2} \mathrm{d}y = \int e^x \mathrm{d}x. \tag{1}$$

För att kunna bestämma en primitiv funktion partialbråksuppdelar vi integranden på vänsterledet,

$$\frac{1}{y+y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y},$$

vilket ger att (1) kan skrivas

$$\log \frac{|y|}{|1+y|} = e^x + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Redan nu kan vi bestämma konstanten C ty $y(1) = 1$ ger

$$C = \log(1/2) - e. \tag{3}$$

Dessutom är (2) ekvivalent med

$$\frac{|y|}{|1+y|} = e^{e^x + C}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Om vi antar att y är positiv (vilket i alla fall stämmer lokalt kring $x = 1$ på grund av begynnelsevärdet), så får vi

$$y(1 - e^{e^x + C}) = e^{e^x + C},$$

vilket tillsammans med (3) leder till

$$y(x) = \frac{\frac{1}{2} e^{e^x - e}}{1 - \frac{1}{2} e^{e^x - e}},$$

och man kan dubbelkolla att denna funktion verkligen löser begynnelsevärdeproblemet.

Tentamensåterlämning annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!