

TENTAMEN

- Det här är en hemtenta, så föreläsninganteckningar och böcker kan förstås användas. Däremot förutsätts det att den skrivande inte kontaktar eller får hjälp av andra personer.

Tentan lämnas in via kursens hemsida, märkt med anonymiseringskod från ladok. Sista inlämningstid är en timma senare än skrivningstiden.

För godkänt på denna skriftliga tenta är det tillräckligt med 15 av de 30 poängen, med åtminstone 4 poäng från de blåmarkerade teorifrågorna. För godkänt på kursen tillkommer en godkänd muntlig redovisning av vissa problem; denna kan påverka poängsättningen (uppåt eller neråt).

Samtliga svar måste motiveras utförligt!

Låt B , som ska användas i några av uppgifterna nedan, vara sista siffran i ditt personnummer.

OBS! Ange bonus på första sidan av din skrivning—de är ju anonymiserade vid rättningen och bonus kan behövas för att avgöra om det blir munta

1. a) Området D är givet av att $xy \geq 1$, $x^2 - y^2 \geq 1$ och $y \geq 0$. Vad är värdet av den generaliserade integralen

$$\int \int_D \frac{(x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}}{x^2 y^2} dx dy?$$

3p

- b) Här är en beräkning av en integral: "Vi vill beräkna

$$\int \int_{\mathbf{R}^2} \cos(x^2 + y^2) dx dy.$$

Tag och integrera över en uttömmande följd, t ex cirkelskivorna D_k med centrum i origo och radie $r = \sqrt{2\pi k}$ där k är ett positivt heltal. Beräkna nu

$$\int \int_{D_k} \cos(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2\pi k}} \cos(r^2) r dr \right) d\phi =$$

$$= 2\pi(1/2) \sin(k2\pi) = 0.$$

Alltså är

$$\int \int_{\mathbf{R}^2} \cos(x^2 + y^2) dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \int_{D_k} \cos(x^2 + y^2) dx dy = 0."$$

- i) Vad är fel med denna beräkning av en generaliserad integral?
- ii) Vad skiljer denna beräkning från den korrekta beräkning du gjort i a) och referera till lämpliga satser.
- iii) Avgör (med motivering) om integralen är divergent eller konvergent.

2p

2. Ett av följande två vektorfält har en potential.

$$\mathbf{F}_1(x, y) = \left(e^x + \arctan y, \frac{x - y}{1 + y^2} \right)$$

$$\mathbf{F}_2(x, y) = (-y, x).$$

Bestäm vilket, ange dess potential, samt beräkna kurvintegralerna $\int_{\gamma} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$, $i = 1, 2$, där γ är cirkeln med radie $B + 2$ och medelpunkt i origo.

5 p

3. a) Vilka singulariteter har kraftfältet

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y + 1}{x^2 + 2x + y^2 + 2y + 2}, -\frac{x + 1}{x^2 + 2x + y^2 + 2y + 2} \right)?$$

1p

- b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_{\gamma} \frac{y + 1}{x^2 + 2x + y^2 + 2y + 2} dx - \frac{x + 1}{x^2 + 2x + y^2 + 2y + 2} dy,$$

där γ är kurvan $|x| + |2y| = B + 4$ genomlöpt i positiv riktning (B definierades ovan).

2p

- c) Räkna upp de (av kursens) satser som du har använt dig av i a). Ge precisa formuleringar av dem och motivera varför de går att tillämpa på problemet i a).

2p

4. (a) Funktionsföljden $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ konvergerar likformigt mot $f(x)$ för $x \in [0, 1]$. Visa noggrant utgående från definitionen av likformig konvergens att funktionsföljden $g_n(x) = f_n(x) + x/n$ också konvergerar likformigt mot $f(x)$ för $x \in [0, 1]$.

2p

(b) Visa med Weierstrass M-kriterium att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+\arctan(nx^2+72)} \cos x$$

konvergerar likformigt på intervallet $[-1/2, 1/2]$. Finns det större intervall där konvergensen också är likformig? Motivera ditt svar!

3p

5. a) Låt $z = x+iy$ och definiera de komplexvärda funktionerna $f_1(z) = z^2$, $f_2(z) = z\bar{z}$ och $f_3(z) = (\bar{z})^2$. Vilka av dem är analytiska funktioner? Motivera direkt från en definition. 2p

b) Beräkna den komplexa linje-integralen

$$\int_{\gamma} \frac{z-1}{z-2} dz.$$

när γ är dels cirkeln med radie 1 kring origo, genomlöst i positiv riktning, dels cirkeln med radie 3, genomlöst på samma vis. 1p

c) Räkna upp de (av kursens) satser och definitioner som du har använt dig av i a och b. Ge precisa formuleringar och motivera varför satser och definitioner går att tillämpa. 2p

6. a) Beräkna flödesintegralen

$$\int \int_Y \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS,$$

där Y är givet av $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq B + 3$, orienterad med valfri normal (men redovisa den explicit) och fältet är givet av $\mathbf{u} = (x - xe^y + e^z, e^y + z, x^3 - z + z^2)$. 3p

b) Räkna upp de (av kursens) satser och definitioner som du har använt dig av i a. Ge precisa formuleringar och motivera varför satser och definitioner går att tillämpa. 2p