MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
R. Bögvad

Analys B VT 2021
Tentamen 25 augusti 2021
kl 8-14(förlängd tid 15)

TENTAMEN

- Det här är en hemtenta, så föreläsningsanteckningar och böcker kan förstås användas. Däremot förutsätts det att den skrivande inte kontaktar eller får hjälp av andra personer.

  Tentan lämnas in via kursens hemsida, märkt med anonymiseringskod från ladok. Sista inlämningstid är en timma senare än skrivningstiden.

  För godkänt på denna skriftliga tenta är det tillräckligt med 15 av de 30 poängen, med åtminstone 4 poäng från de blåmarkerade teorifrågorna. För godkänt på kursen tillkommer en godkänd muntlig redovisning av vissa problem; denna kan påverka poängsättningen(uppåt eller neråt).

  Samtliga svar måste motiveras utförligt!

  Låt B, som ska användas i några av uppgifterna nedan, vara sista siffran i ditt personnummer.

  OBS! Ange bonus på första sidan av din skrivning—de är ju anonymiserade vid rättningen och bonus kan behövas för att avgöra om det blir munta.

1. a) Den generaliserade integralen

$$\int\int\int_{\mathbf{R}^3} \frac{e^{-(2x+By+33z)^2}}{(1+(y+21z)^2)(1+(4z)^2)}dxdydz$$

   är konvergent. Beräkna den. (Ledning: byt variabler!) 3p

   b) Den lineära transformationen $\sigma : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ är bijektiv. Funktionen f är positiv, C^1 och definierad i hela $\mathbf{R}^3$ utom i origo. Visa att integralen

$$\int\int\int_{R^3} f(x,y,z)dxdydz,$$

   är konvergent omm

$$\int\int\int_{R^3} f(\sigma(x,y,z))dxdydz$$

   är konvergent.

   2p

2. Genom avbildningen $x(u,v) = u,\ y(u,v) = v, z(u,v) = u$ överförs området $u^2 + v^2 \leq 1$ i uv-planet på en yta Y i xyz-rummet med rand C som orienteras positivt.(För B nedan, se anvisningarna ovan till tentan.)

   a) Ge en parametrisering av C. 1p

   b) Låt $\mathbf{F} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{B})$, och beräkna kurvintegralen

   $$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

   1p

   c) Ange en enhetsnormal $\mathbf{N}$ till ytan Y. 1p

   d) Beräkna arean av Y. 2p

3. a) Visa att $f(z) = z^3$ är en analytisk funktion för alla $z \in \mathbf{C}^3$ genom att verifiera att funktionen uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. 1p

   b) Funktionen $f(z) = z^3$ kan beskrivas som en potensserie kring punkten $z = 1$. Hur ser denna potensserie ut och vad är dess konvergensradie? 1p

   c) Beräkna

   $$A = \int_\gamma z^3 dz,$$

   där γ är det räta linje-segmentet från origo till $(1 + i)$ i det komplexa talplanet. 1p

   d) Om γ i c) hade varit en annan kurva mellan origo och $1 + i$ skulle värdet på integralen A varit annorlunda? Motivera ditt svar med hänvisning till de satser som du använder, och ange dessa precist, speciellt med alla villkor som behövs för att de ska gälla. 1p

   e) Låt C vara cirkeln med radie 2 och medelpunkt i $z = i$ i det komplexa talplanet. Beräkna integralen

   $$\int_C \frac{(B + 2)dz}{z^2 - 3z + 2}.$$

   1p

4. a) Vad är konvergensradien för serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{17} z^n?$$

1 p

b) Visa att för $|z| < 0.5$ konvergerar serien i a) likformigt till en kontinuerlig funktion. 2p

c) Funktionsföljden $f_n(x)$ konvergerar likformigt till $f(x)$ när $n \to \infty$ för $x \in \mathbb{R}$. Vidare finns det ett tal M så att $|f(x)| \leq M$ om $x \in \mathbb{R}$. Visa att följden $g_n(x) := \frac{n+1}{n} f_n(x)$ också konvergerar likformigt mot $f(x)$.

2p

5. Låt C vara kurvan $x^2 + 16y^2 = 1$ i planet.

a) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C y dx + B x dy,$$

där C är positivt orienterad. 2p

b) Ange en enhetsnormal till C. 1p

c) För vilka personnummer(eller för vilka B) är differentialformen $y dx + B x dy$ i a) exakt? 1p

d) Vilka satser har du använt i a-c) i denna uppgift? Ange dem, inklusive alla villkor som behövs för att de ska gälla. 1p

6. Låt K vara alla punkter (x, y, z) sådana att $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, och Y randen till K.

a) Ange en enhetsnormal $\mathbf{N}$ till Y, riktad mot det inre av K. 1 p

b) Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x + y, 2yz, e^y + z^3 + B)$. Beräkna $\int\int_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$. 2 p

c) Ange de satser som du använt i b), och beskriv dessa precist, inklusive de villkor som behövs för att de ska gälla. 2 p