MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
R. Bögvad

Analys B HT 2022
Tentamen 14 februari 2022
kl 8-13

- **Hjälpmedel:** Inga, förutom att man kan ta med sig sin egen lapp med viktiga satser, formler och exempel. Lappen ska bestå av högst ETT A4-papper och vara HANDSKRIVEN(eventuellt på bägge sidor) och ska lämnas in tillsammans med skrivningen.

  .

- För godkänt är det tillräckligt med 15 av de 30 poängen, med åtminstone 4 poäng från de blåmarkerade teorifrågorna.
- *Samtliga svar måste motiveras utförligt!*
- Examinator kommer att besöka tentasalarna efter ungefär halva tentamenstiden, och kan dessutom nås under hela tentamenstiden via mail:rikard@math.su.se eller på telefon:0705502051.
- Lycka till!

TENTAMEN

1. Låt C vara kurvan $4x^2 + 16y^2 = 1$ i planet.

   a) Beräkna kurvintegralen
   $$\int_\gamma x dx + y dy,$$
   där γ är (det kortaste) segmentet på kurvan C från $(0, 1/4)$ till $(1/2, 0)$. 2p

   b) Ange en tangentvektor och en enhetsnormal till varje punkt (x, y) på C. 1p

   c) För vilka tal B är differentialformen $2xy^3dx + Bx^2y^2dy$ exakt? 1p

   d) Antag att det är känt att B är sådant att differentialformen $2xy^3dx + Bx^2y^2dy$ är exakt. Vad är då
   $$\int_C 2xy^3dx + (Bx^2y^2 + x)dy,$$
   om C är orienterad moturs? 1p

2. a) Beräkna den generaliserade integralen

$$\int\int\int_{\mathbf{R^3}} \frac{dxdydz}{(1+(2x+3y+z)^2)(1+(2y+3z)^2)(1+(4z)^2)}$$

(Ledning: byt variabler!) 3p

b) Avbildningen $\sigma : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ är bijektiv och C^1 och tar origo till origo. Vidare gäller att Jakobianen för transformationen uppfyller att $|J(x,y,z) - 1| < 0.1$ i varje punkt (x,y,z) i $\mathbf{R}^3$. Funktionen f är positiv, C^1 och definierad i hela $\mathbf{R}^3$ utom i origo. Visa att den generaliserade integralen

$$\int\int\int_{R^3} f(x,y,z)dxdydz,$$

är konvergent omm

$$\int\int\int_{R^3} f(\sigma(x,y,z))dxdydz$$

är konvergent.

2p

3. Låt S vara ytan i rummet given av $x = 0, y \geq 0, z \geq 0$ och $y^2 + z^2 \leq 1$ och C dess rand, orienterad negativt.

a) Ange en enhetsnormal $\mathbf{N}$ till ytan S. 1p

b) Ge parametriseringar av S och C. 1p

c) Beräkna $\int\int_S dA$. 1p

d) Låt $\mathbf{F} = (\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x})$, och beräkna med hjälp av Stokes sats kurvintegralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

(Teckenfel ger 1 poängs avdrag, så tänk igenom att du använder rätt orientering!) 2p

4. a) Antag att $f(z)$ är en analytisk funktion av $z = x+iy$. Dess realdel är $g(x,y) = Ref(x+iy)$. Visa att

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial y} = 0.$$

(Ledning: använd Cauchy-Riemanns ekvationer. 2p

b) Låt C vara cirkeln med radie 2 och medelpunkt i $z = 1$ i det komplexa talplanet. Beräkna integralen

$$\int_C \frac{dz}{z^2 - 2z + 1}.$$

1p

c) Låt γ vara segmentet från 3 till $1+2i$ på cirkeln C med radie 2 och medelpunkt i $z = 1$ i det komplexa talplanet. Beräkna integralen

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 2z + 1}.$$

Skulle integralens värde vara detsamma om γ var en annnan väg från 3 till $1 + 2i$? 2p

5. a) Differentialekvationen $y' - 2zy = 0$ har en potensserielösning $y(z)$ som uppfyller att $y(0) = 1$. Finn den och bestäm dess konvergensradie. 3p

b) Antag att serien $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergerar likformigt för $x \in \mathbb{R}$, pch att funktionsföljden $g_n(x)$ uppfyller att $g_n(x) \leq f_n(x)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Gäller då att $\sum_1^{\infty} g_n(x)$ också konvergerar likformigt? (Ge ett argument eller motexempel.)

Vad är svaret på samma fråga om vi antar att $0 \leq g_n(x) \leq f_n(x)$ för alla $n \in \mathbb{N}$ och $x \in \mathbb{R}$?(Ge även här ett argument eller motexempel.)

2p

6. Låt K vara kuben som består av punkter (x, y, z) sådana att $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$, och låt Y vara randen till K orienterad med utåtriktad normal.

a) Ange en enhetsnormal $\mathbf{N}$ till Y, riktad mot det inre av K. 1 p

b) Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 z, y^3, xz + 2)$. Beräkna $\int\int_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$. 2 p

c) Låt L vara en kropp med $\mathbf{C}^1$-rand T, som är orienterad med en utåtriktad enhetsnormal N. Visa att

$$\int\int_S (0, 0, z) \cdot N dS = \int\int_S (0, y, 0) \cdot N dS$$

. 2 p