MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator:Rikard Bøgvad

Analys B HT 2020
Tentamen 10 januari 2022
kl 08-13

- **Hjälpmedel:** Inga, förutom att man kan ta med sig sin egen lapp med viktiga satser, formler och exempel. Lappen ska bestå av högst ETT A4-papper och vara HANDSKRIVEN(eventuellt på bägge sidor) och ska lämnas in tillsamman med skrivningen.
- För godkänt på denna skriftliga tenta är det tillräckligt med 15 av de 30 poängen(inklusive bonus), med åtminstone 4 poäng från de markerade teorifrågorna.
- *Samtliga svar måste motiveras utförligt!*
- Examinator kommer att besöka tentasalen efter ungefär halva tentamenstiden. Tentamensvakter kan nå examinatorn under tentamenstiden via mail: rikard@math.su.se eller tel: 0705502051.

TENTAMEN

1. a) Kurvan γ är segmentet av kurvan $x = y^2$ från $(0,0)$ till $(4,2)$. Ange en parametrisering av kurvan och en tangentvektor i varje punkt. Beräkna sedan kurvintegralen

$$\int_\gamma xdx + ydy.$$

2p

b) Visa att differentialen

$$\frac{2ydx}{1+(xy)^2} + \frac{2xdy}{1+(xy)^2}$$

är exakt. 1p

c) Triangeln ABC har hörnen $A = (0,0)$. $B = (10,-1)$ och $C = (4,4)$. Beräkna

$$\int_\gamma \left(\frac{2y}{1+(xy)^2}\right)dx + \left(\frac{2x}{1+(xy)^2} + x\right)dy,$$

där γ är kurvan längs triangeln från A till C till B och tillbaka till A. (Ledning: Tillämpa Greens sats.) 2p

2. a) (**TEORI**) Bestäm en potential till kraftfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy).$$

Är F konservativt? Vad är $\mathbf{r}otF$? . 1p

b) Beräkna arean av skivan E i rummet som är skärningen av cylindern $x^2+y^2 \leq 4$ med planet $x-2y+z=0$. (Ledning: parametrisera skivan lämpligt, t ex med ett område i xy-planet.) 2p

c) Låt $\mathbf{G}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) + (x + 2y, x + 2y, x + 2z)$, där $\mathbf{F}$ är fältet i a). Beräkna $\mathbf{r}otG \cdot \mathbf{N}$ där $\mathbf{N}$ är en enhetsnormal till skivan E i b), samt $\int_\gamma \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$, där γ är randen till E (från b) genomlöpt i positiv riktning. 2p

3. a) (**TEORI**)Funktionsföljden $f_n(x), n = 1, 2...$ konvergerar likformigt mot $f(x)$ for $x \in [-2, 2]$. Visa utgående från definitionen av likformig konvergens att funktionsföljden $f_n(x)g(x), n = 1, 2...$ också konvergerar likformigt, om $g(x) = \arctan(x)$. Mot vilken funktion? Är konvergensen av $f_n(x)g(x)$ likformig om man bara kräver att g är en kontinuerlig funktion definierad på $[-2, 2]$? 3p

b) Visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos(x))^n}{n^2}$$

konvergerar likformigt mot en funktion definierad på intervallet $[-1, 1]$. Är denna kontinuerlig? Finns det störrre intervall där konvergensen också är likformig? Motivera dina svar! 2p

4. a) (**TEORI**) Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. Visa att $zf(z)$ också uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. 1p

b) Beräkna den komplexa linje-integralen

$$\int_\gamma z dz,$$

där γ är cirkelbågen moturs från 1 till i på cirkeln med radie 1. 2p

c) (**TEORI**) Skulle integralen i b) få ett annat värde om γ var en annan kurva från 1 till i? Ge i så fall ett exempel på en sådan kurva. 1p

d) Beräkna den komplexa linjeintegralen

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 - 3z}$$

där γ är cirkeln med radie 1 kring origo, genomlöpt i positiv riktning. 2p

5. Beräkna flödesintegralen

$$\int\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS,$$

där S är halvsfären $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0$, orienterad med uppåtriktad normal och fältet är givet av $\mathbf{u} = (\sin(7yz), e^z, z^2)$. 5p

6. a) (**TEORI**) Den lineära transformationen $\sigma : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ är en spegling i ett plan Π som ges av en ekvation $ax+by+cz=0$. För den kompakta och kvadrerbara kroppen K, gäller att $\mathbf{x} \in K \iff \sigma(\mathbf{x}) \in K$. (Här är $\mathbf{x} = (x,y,z)$.) För en viss C^1-funktion $f(x,y,z)$, definierad i $\mathbb{R}^3$, gäller vidare att $f(\sigma(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$. Visa att

$$\int\int\int_{K^+} f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{K^-} f(x,y,z)dxdydz,$$

där $K^+ = \{(x,y,z) : ax+by+cz \geq 0\}$ och $K^- = \{(x,y,z) : ax+by+cz \leq 0\}$ 3p

b) Låt K vara klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ och p ett polynom. Beräkna

$$\int\int\int_K (xp(x^2)+1)dxdydz.$$

2p