

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera samtliga lösningar noga. 15 poäng (inklusive bonus) ger säkert godkänt.

1. Beräkna följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n \right).$$

2 p

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x - 2 \arctan x}{e^{x^3} - 1}.$$

2 p

2. Undersök lokala och globala extremvärden, asymptoter och konvexitetsegenskaper hos kurvan $y = f(x)$ där

$$f(x) = \ln|x + 2| + 2 \ln|x| + x.$$

Skissera grafen.

5 p

3. Betrakta alla rektanglar, med sidorna parallella med koordinat-axlarna, som får plats mellan x -axeln och kurvan $y = e^{-x^2}$. Avgör om det finns någon sådan rektangel med maximal area, samt bestäm i så fall dess storlek.

5 p

4. Bestäm största och minsta värde till funktionen

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y$$

i området $\{(x, y) : x, y \geq 0 \text{ och } x + y \leq 1\}$.

5 p

5. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy,$$

där D är triangeln med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(1, 2)$ och $(2, 1)$.

5 p

6. a) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$y' \cos x + y \sin x = \cos^3 x, \quad y(\pi) = -1.$$

3 p

b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' - 2y' - 15y = 6e^{-x}.$$

3 p

Information om skrivningsåterlämning ges av studentexpeditionen.