STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
MM2002 Matematik för naturvetenskaper I
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
2022-02-23

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

---

1. **(2+3 p.)** Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right).$$

Lösning: Ett standardgränsvärde är $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Därför har vi

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{x}=+\infty$$

och

$$\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Slutsats: det första gränsvärdet existerar inte.

För det andra gränsvärdet har vi

$$\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}=\frac{x^3-12x+16}{(x-2)(x^3-8)}$$

och båda täljare och nämnare försvinner i $x=2$. Genom polynomdivision får vi

$$x^3-12x+16=(x-2)^2(x+4)$$

och

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4),$$

vilket leder till

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x+4)}{(x-2)^2(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

2. **(4 p.)** För alla reella a bestäm antalet lösningar till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned}(4-a)x_1+x_2&=1,\\ -2x_1+(1-a)x_2&=-2.\end{aligned}$$

Lösning: Detta ekvationssystem kan skrivas $A\binom{x_1}{x_2}=\binom{1}{-2}$, där

$$A=\begin{pmatrix}4-a & 1\\ -2 & 1-a\end{pmatrix}.$$

Determinanten av A ges då av

$$\det A = (4-a)(1-a) + 2 = a^2 - 5a + 6,$$

vilket är lika med noll om och endast om $a = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}}$, alltså $a = 2$ eller $a = 3$.

Konsekvens: För alla $a \neq 2, 3$ har ekvationssystemet en entydig lösning. Vi testar de övriga två fallen separat.

$a = 2$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

och det följer från den sista raden att systemet inte har någon lösning.

$a = 3$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Eftersom den här trappstegsformen har ett pivotelement men två variabler finns det oändligt många lösningar i detta fall.

3. **(3+2+1 p.)** Låt $f(x) = 10(x \ln x)^3$ där $x > 0$.

   (a) Finn alla lokala minimi- och maximipunkter samt alla terrasspunkter till f.

   (b) Beräkna gränsvärdena $\lim_{x\to 0+} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ och $\lim_{x\to 0+} f'(x)$.

   (c) Skissa grafen av f. (Tips: $e^{-1} \approx 0,37$ och $(e^{-1})^3 \approx 0,05$.)

Lösning:

(a) Vi deriverar f:

$$f'(x) = 10 \cdot 3(x \ln x)^2 \left(1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}\right) = 30(x \ln x)^2(\ln x + 1).$$

Alltså blir derivatan noll om och endast om antingen $x \ln x = 0$ eller $\ln x + 1 = 0$. Den första ekvationen har lösningen $x = 1$ och den andra $x = e^{-1}$. Vi undersöka tecknet på $f'(x)$, vilket ges av tecknet på $\ln x + 1$. Mellan 0 och e^{-1} är detta negativ, annars alltid positiv. Slutsatsen är att f är avtagande mellan noll och e^{-1} och växande mellan e^{-1} och $+\infty$. Som konsekvens har f ett lokalt minimum i $x = e^{-1}$ och en terrasspunkt i $x = 1$. Lokalt maximum finns inte.

(b) Vi har $\lim_{x\to 0+} 10(x \ln x)^3 = 0$ (standardgränsvärde), $\lim_{x\to +\infty} 10(x \ln x)^3 = +\infty$ (eftersom båda x och $\ln x$ går mot $+\infty$) och

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} 30(x \ln x)^2(\ln x + 1) = \lim_{x\to 0+} 30\left(x^2(\ln x)^3 + (x \ln x)^2\right) = 0$$

(standardgränsvärden).

(c) Skissen ska tillverkas med hjälp av resultaten av (a) och (b). Bl.a. ska det synas att tangentens lutning går mot noll när $x \to 0+$.

4. **(5 p.)** Bestäm största och minsta värdet för funktionen $f(x,y) = \frac{x(x^2+y^2)}{1-x^2-y^2}$ på det område i planet som beskrivs av $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$.

Lösning:

Vi kollar först på kritiska punkter och beräknar därför de partiella derivatorna:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(x^2+y^2+x\cdot 2x)(1-x^2-y^2) - x(x^2+y^2)(-2x)}{(1-x^2-y^2)^2} \\
&= \frac{-x^4 - y^4 + 3x^2 + y^2 - 2x^2y^2}{(1-x^2-y^2)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2xy(1-x^2-y^2) - x(x^2+y^2)(-2y)}{(1-x^2-y^2)^2} = \frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Vi ser direkt att $\frac{\partial f}{\partial y}$ blir noll om och endast om $x = 0$ eller $y = 0$. Stoppar vi in $x = 0$ i equationen $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ så får vi

$$0 = -y^4 + y^2 = -y^2(y^2 - 1),$$

vilket har lösningarna $y = 0$, $y = -1$, $y = 1$ och ger kritiska punkter $(0,0), (0,-1), (0,1)$. På samma sätt leder $y = 0$ till

$$0 = -x^4 + 3x^2 = -x^2(x^2 - 3),$$

med lösningarna $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$. Vi får alltså de kritiska punkterna $(-\sqrt{3}, 0)$ samt $(\sqrt{3}, 0)$ utöver de tidigare.

Punkterna $(0,-1), (0,1), (-\sqrt{3},0), (\sqrt{3},0)$ ligger dock inte inom området, t.ex. $\sqrt{3}^2 + 0^2 = 3 > \frac{1}{4}$. Den enda kritiska punkten inom området är alltså $(0,0)$.

Vi undersöker områdets rand, cirkeln av radie $1/2$. Vi kan parametrisera den med $x = \frac{1}{2}\cos t$, $y = \frac{1}{2}\sin t$ med $0 \leq t \leq 2\pi$. Funktionen som ska undersökas är då

$$g(t) = f(x,y) = \frac{\frac{1}{2}\cos t \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{6}\cos t,$$

och den blir maximal i $t = 0$ (motsvarande $(x,y) = (1/2, 0)$) och minimal i $t = \pi$ (motsvarande $(x,y) = (-1/2, 0)$).

Vi har nu tre kandidatpunkter och beräknar funktionsvärdena. De blir

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0, \\
f(1/2,0) &= \frac{1}{6} \\
f(-1/2,0) &= -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Därmed är funktionens maximum på området lika med $1/6$ och minimum lika med $-1/6$.

5. **(2+3 p.)** I en ON-bas $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ låt u, v, w vara vektorer i rummet med koordinater $u_{\mathbb{B}} = (1, 0, \lambda)$, $v_{\mathbb{B}} = (1, -1, 0)$ och $w_{\mathbb{B}} = (1, 2, 1)$.

   (a) För varje λ beräkna volymen av den parallellepiped som u, v, w spänner upp.

(b) För vilka värden på λ utgör vektorerna u, v, w en bas i rummet? I fallet $\lambda = 1$ bestäm vektorn e_3:s koordinater i denna bas.

(a) Volymen ges av absolutbeloppet av determinanten

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 2\lambda + \lambda + 0 + 0 = 3\lambda - 1.$$

Däför har vi

$$V = |3\lambda - 1|$$

som volym.

(b) u, v, w utgör en bas i rummet om och endast om determinanten ovan är olika noll, alltså om och endast om $\lambda \neq 1/3$. För $\lambda = 1$ handlar det alltså om en bas. I denna bas har vi

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså koordinaterna till e_1, e_2, e_3 genom att invertera matrisen. Med hjälp av Gauss-Jordan-eliminering får man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$e_3 = \frac{1}{2}(3u - 2v - w),$$

i andra ord, e_3 har koordinater $(3/2, -1, -1/2)$ i denna bas.

6. **(3+2 p.)**

   (a) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = xy\cos x$ som uppfyller $y(0) = 1$.

   (b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' - y' - 2y = 0$.

Lösning:

(a) Denna differentialekvation har separabla variabler, $y' = y(x\cos x)$, och kan därför skrivas som

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int x\cos x \mathrm{d}x.$$

Integralen med avseende på x kan beräknas med hjälp av partialintegration:

$$\int x\cos x \mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x \mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C,$$

där $C \in \mathbb{R}$ är godtycklig. Vi får alltså

$$\ln|y| = x \sin x + \cos x + C. \tag{1}$$

Vi kan redan nu bestämma konstanten C: stoppar vi in punkten $(x, y) = (0, 1)$ i den sista raden så får vi

$$0 = \ln 1 = 0 \sin 0 + \cos 0 + C = 1 + C,$$

alltså $C = -1$. Ekvationen (1) ger då

$$|y| = e^{x \sin x + \cos x - 1}.$$

Eftersom vi vet att $y(0) = 1$ är positiv, följer det

$$y = e^{x \sin x + \cos x - 1}.$$

(b) Det här handlar om en andra ordningens linjär, homogen differentialekvation. Dess karakteristiska ekvation är $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ och har lösningarna

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}},$$

dvs. $\lambda = 2$ eller $\lambda = -1$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen är då

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tentamensåterlämning annonseras på kurshemsidan.