MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Håkan Granath

Tentamensskrivning i
Algebra, Matematik 1, 7.5 hp
den 2 mars 2022

Tillåtna hjälpmedel är skrivdon. Fullständiga och väl motiverade lösningar krävs. Svaren ska framgå tydligt och vara rimligt slutförenklade. Betygsgränser:

Max	30 p	B	24 p	D	18 p
A	27 p	C	21 p	E	15 p

Bonuspoängen från höstterminens problemsamlingar räknas in under rättningen.

Koordinater förutsätts vara givna med avseende på en högerorienterad ON-bas.

1. Betrakta den diofantisk ekvation

$$31x + 51y = 3.$$

   (a) Bestäm alla lösningar till ekvationen. (4p)

   (b) Ange alla lösningar sådana att $|y| < 31$. (1p)

2. (a) Visa att $3^{103} - 5$ är jämnt delbart med 22. (3p)

   (b) För vilka värden på konstanten a bildar lösningarna till ekvationen (2p)

$$x^2 - axy + ay^2 = 1$$

   en ellips?

3. Vi har tre punkter

$$P = (0, 1, 0), \qquad Q = (2, 2, 1) \quad \text{och} \quad R = (3, 0, 1).$$

   (a) Bestäm ekvationen på normalform för planet som innehåller punkterna. (3p)

   (b) Beräkna arean av triangeln med hörn i de tre punkterna, och avgör om triangeln är rätvinklig. (2p)

4. Ekvationen $p(z) = 0$, där (5p)

$$p(x) = z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 10z + 10,$$

   har en rent imaginär rot. Bestäm alla lösningar till ekvationen.

Var god vänd!

5. Linjen L_1 ges av (5p)

$$(x, y, z) = (4, 2, 0) + t(3, 1, -1), \qquad t \in \mathbb{R},$$

och linjen L_2 passerar genom punkterna $(3, 0, 6)$ och $(3, 1, 7)$. Bestäm avståndet mellan linjerna samt bestäm två punkter, en på respektive linje, som ligger så nära varandra som möjligt.

6. Betrakta vektorerna

$$\begin{cases} \vec{e}_1{}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \\ \vec{e}_2{}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1) \\ \vec{e}_3{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1). \end{cases}$$

(a) Visa att $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ bildar en positivt orienterad ON-bas för rummet. (3p)

(b) Låt F vara den linjära avbildningen som är rotation ett halvt varv runt linjen $(x, y, z) = (t, t, t),\ t \in \mathbb{R}$. Bestäm matrisen för F i standardbasen. (2p)