MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Rikard Bøgvad

Tentamensskrivning i
Matematik för naturvetenskaper II
MM4001, moment M120,
4 maj 2017

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera samtliga lösningar noga. 15 poäng (inklusive bonus) av 30 möjliga ger säkert godkänt. Återlämning av skrivningen sker måndagen den 15 maj kl 12-12.15 utanför sal 15.

1. a) Låt b_n vara den minsta positiva resten av $31^n + 29^n + 60^n$ vid division med 30. Beräkna b_n. Existerar $\lim_{n\to\infty} b_n$? Vad är detta gränsvärde i så fall? 2.5 p

   b) Vad är koefficienten framför x när man expanderar uttrycket $(1/x - 2x^2)^{14}$ i potenser av x? (OBS! Det är förstås tillåtet att ge fakulteter och potenser i svaret, utan att dessa räknas ut.) 2.5 p

2. (Positivt orienterat ON-system) Låt l vara linjen som är given på parameterform av $(x, y, z) = (-11, 0, 123) + t(1, 2, -1),\ t \in \mathbb{R}$. I vilken eller vilka punkter på grafen till funktionen $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ är normalvektorn till tangentplanet i den punkten parallell med linjen l? 5 p

3. (Positivt orienterat ON-system) En kurva består av punkterna $(1, 2t, t^2),\ \ t \in \mathbb{R}$. Vilka punkter på kurvan har minst avstånd till planet $x + y + z + 10 = 0$? Vad är avståndet? 5 p

4. a) Utveckla funktionen $f(x) = \frac{\sin x^3}{x^3}$ i Maclaurinserie (kring $x = 0$.) Använd resultatet för att bestämma $f^{(27)}(0)$. (OBS! Det är förstås tillåtet att ge fakulteter och potenser i svaret, utan att dessa räknas ut.) 2.5 p

   b) Bestäm gränsvärdet
   $$\lim_{x\to 1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{(x-1)^2}.$$
   2.5 p

5. a) Beräkna dubbelintegralen
   $$\int\int_D (x + 2y)dxdy,$$
   där $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y^3,\ 0 \leq y \leq 1\}$. 2.5 p

   b) Rita upp området $D = \{(x, y) : x \geq 0,\ |y| \leq x,\quad \text{och } x^2 + y^2 \leq 2\}$. Beräkna sedan dubbelintegralen
   $$\int\int_D (x^3 + y^2 x)dxdy.$$
   2.5 p

6. (Positivt orienterat ON-system, $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ bas för vektorer i rummet). Låt S_1 vara speglingen i planet $x + y = 0$. Låt T vara en lineär transformation, som uppfyller $T(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_2}, \mathbf{T}(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, samt $T(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$. Visa att T är inverterbar. Bestäm sedan matrisen till den sammansatta avbildningen $R := T^{-1} \circ S_1$, och räkna till sist ut $R(2\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3})$. 5 p