MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Rikard Bøgvad

Tentamensskrivning i
Matematik för naturvetenskaper II
MM4001, moment M120,
12 juni 2017

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera samtliga lösningar noga. 15 poäng (inklusive bonus) av 30 möjliga ger säkert godkänt. Återlämning av skrivningen sker måndagen den 19 juni kl 12-12.15 utanför sal 15.

1. a) Beräkna vilken veckodag det är om $22^{1723} + 77^{1234} + 9^{61}$ dagar. 2.5 p

   b) En punktmängd X i planet består av 2017 punkter. Oavsett vilka tre av dessa punkter som väljs så ligger de INTE på en linje. Hur många trianglar kan man bilda genom att välja tre punkter från X och förbinda dem med räta sträckor? Om man dessutom får färga alla hörnen i fyra olika färger, bland hur många färgade trianglar kan man välja, om man nu absolut måste välja? (OBS! Det är förstås tillåtet att ge fakulteter och potenser i svaret, utan att dessa räknas ut.)

   2.5 p

2. (Positivt orienterat ON-system) Låt C vara en satellit som färdas i rummet enligt $C(t) = (1, t, t^2)$, där t är tiden. Varje punkt i planet (x, y, z) har en viss temperatur $T(x, y, z)$ och man vet att $\frac{\partial T}{\partial x}(1, 2, 4) = 1$, $\frac{\partial T}{\partial y}(1, 2, 4) = 3$ och $\frac{\partial T}{\partial z}(1, 2, 4) = -0.5$. Med vilken hastighet ändras temperaturen för satelliten vid tiden $t = 2$?

   5 p

3. (Positivt orienterat ON-system) En variabel punkt $Q(t)$ är given av $(2, 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Tillsammans med $R = (1, 0, 0)$ och $P = (2, 0, -1)$ bestämmer den en triangel. Ge en formel för arean av triangeln(som funktion av t) och bestäm för vilka t, om några, som arean är större än 5. 5 p

4. a) Utveckla funktionen $f(x) = \frac{\sin (x-1)^3}{(x-1)^3}$ i Taylor serie kring $x = 1$.) Använd resultatet för att bestämma $f^{(600)}(1)$. (OBS! Det är förstås tillåtet att ge fakulteter och potenser i svaret, utan att dessa räknas ut.)

   2.5 p

   b) Bestäm gränsvärdet
   $$\lim_{x \to 1} \frac{\sin (x-1)^3}{(x-1)^3}.$$

   2.5 p

5. a) Beräkna dubbelintegralen
   $$\int\int_D (3x + y)dxdy,$$
   där $D = \{(x, y) : 0 \le y \le x^3,\ 0 \le x \le 1\}$. 2.5 p

   b) Rita upp området $D = \{(x, y) : x \le 0,\ |x| \le |y|, \quad \text{och } 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$. Beräkna sedan dubbelintegralen
   $$\int\int_D \sin(x^2 + y^2)dxdy.$$

   2.5 p

6. (Positivt orienterat ON-system, $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ bas för vektorer i rummet). Låt P vara projektionen på planet $x+y+z=0$. Låt T vara en lineär transformation, som uppfyller $T(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_2}$, $\mathbf{T}(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} +) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, samt $T(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{2e_2} + \mathbf{e_3}$. Visa att T är inverterbar. Bestäm sedan matrisen till den sammansatta avbildningen $R := T^{-1} \circ S_1$, och räkna till sist ut $R(2\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3})$. 5 p