MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Rikard Bøgvad

Tentamensskrivning i
Matematik för naturvetenskaper II
MM4001, moment M120,
12 juni 2017
Lösningar

1. a) Modulo 7 är $22^{1723} + 77^{1234} + 9^{61} \equiv 1^{1723} + (0)^{1234} + 2^{61} = 1 + 2^{61}$, Beräkna nu resten av potenser av 2, och man ser att $2^3 \equiv 1$. Alltså är också $2^{60} = (2^3)^{20} \equiv 1$ och $2^{61} = 2 \cdot 2^{60} = 2$. Alltså är $1 + 2^{61} \equiv 1 + 2 = 3$. Skrivningsdagen var en måndag och svaret är alltså torsdag 2.5 p

   b) Man kan välja tre element ur en mängd med 2017 element på $\binom{2017}{3} = \frac{2017!}{2014!3!}$ sätt. Det finns fyra färger och de tre hörnen(som ju är distinkta) kan målas på 4^3 sätt. Antalet färgade trianglar är alltså produkten av dessa två tal: $\frac{4^3 2017!}{2014!3!}$

   2.5 p

2. (Positivt orienterat ON-system) Temperaturen hos satelliten vid tiden t när den befinner sig i punkten $(1, t, t^2)$ är $C(t) = T(1, t, t^2)$. Temperaturens derivata m a p t fås med kedjeregeln:

$$C'(t) = \frac{\partial T}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial T}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial T}{\partial z} z'(t).$$

Satelliten passerar punkten $(1, 2, 4)$ vid tiden $t = 2$, och då är $x'(2) = 0,\ y'(2) = 1, z'(2) = 4$, så att $C'(2) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 0.5 \cdot 4 = 1$.

5 p

3. Arean av en triangel kan beräknas som längden av kryssprodukten av två vektorer längs triangelns sidor(delat med 2). Vektorn $\bar{R}Q = (1, 3, t)$ och $\bar{R}P = (1, 0, -1)$ har kryssprodukten $(-3, 1 + t, -3)$ och alltså längden $\sqrt{9 + (1 + t)^2 + 9}$. Triangelns area är alltså $A(t) = \frac{1}{2}\sqrt{9 + (1 + t)^2 + 9}$. Detta är större än 5 omm $\sqrt{9 + (1 + t)^2 + 9} > 10 \iff (1 + t)^2 > 100 - 18 = 82$, vilket sker när $1 + t > \sqrt{82}$ eller $1 + t < -\sqrt{82}$. Svaret är alltså $t < -1 - \sqrt{82}$ eller $t > -1 + \sqrt{82}$.

5 p

4. a) Sinus funktionen har Maclaurinserien $\sin h = h - h^3/3! + h^5/5! - \ldots$ Substituerar vi $h = (x-1)^3$ får vi resultatet

$$\sin(x - 1)^3 = (x - 1)^3 - (x - 1)^9/3! + (x - 1)^{15}/5! - \ldots + (x - 1)^{3\cdot 201}/201! - \ldots$$

   och alltså

$$\frac{\sin(x - 1)^3}{(x - 1)^3} = 1 - (x - 1)^6/3! + (x - 1)^{12}/5! - \ldots + (x - 1)^{600}/201! - \ldots.$$

   Entydighetssatser för Taylorserier ger att detta är Taylorserien i $x = 1$för funktionen. Alltså är koefficienten $1/201!$ till $(x - 1)^{600}$ också $f^{(600)}(1)/600!$. Därav $f^{(600)}(1) = 600!/201!$. 2.5 p

   b) Använd standardgränsvärdet $\lim_{h\to 0} \sin h/h = 1$. Sätt $h = (x-1)^3$. Att $x \to 1 \implies h \to 0$, och alltså är

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin (x - 1)^3}{(x - 1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Man kan också använda a), från vilket gränsvärdet ses direkt genom att låta $x \to 1$ i Taylorutvecklingen. Vidare går det att använda l'Hopitals regel

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin{(x-1)^3}}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)^2 \cos{(x-1)^3}}{3(x-1)^2} = \cos 0 = 1.$$

2.5 p

5. a) Räkna på:

$$\int\int_D (3x+y)dxdy = \int_0^1 (\int_0^{x^3} (3x+y)dy)dx = \int_0^1 [3xy + y^2/2]_0^{x^3})dx = \int_0^1 (3x^4 + x^6/2)dx.$$

Den sista integralen är $[3x^5/5 + x^7/14]_0^1 = 3/5 + 1/14 = 47/70.$

2.5 p

b) Största svårigheten här är området. Villkoret $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ betyder att området ligger mellan cirklarna med radie 1 respektive $\sqrt{2}$. Villkoret $x \leq 0$ betyder att det ligger i andra och tredje kvadranten. Villkoret $|x| \leq |y|$ slutligen är uppfyllt i två av de fyra kvadranter linjerna $y = xochy = -x$ indelar planet i. I polära koordinater är det de punkter (r, θ) där $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/4$ (E_1) och $5\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/2$ (E_2()och $1 \leq r \leq \sqrt{2}$). Observera att bägge omfattar en cirkelsektor som är $\pi/4$. Nu kan vi göra substitution till polära koordinater i den första integralen(över E_1). Observera att $x^2 + y^2 = r^2$.

$$\int\int_{E_1} \sin(x^2+y^2)dxdy = \int_{pi/2}^{3\pi/4} (\int_1^{\sqrt{2}} \sin r^2 r dr)d\theta = (\pi/4)[(1/2)\cos r^2]_1^{\sqrt{2}} = (\pi/8)(\cos 2 - \cos 1).$$

Den andra integralen (över E_2 ger samma räkning och belopp, och alltså är svaret $(\pi/4)(\cos 2 - \cos 1)$.

2.5 p

6. Projektionen på planet $x + y + z = 0$ som ju har normalvektorn $\bar{n} = (1, 1, 1)$, ges av formeln

$$P(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{(x, y, z) \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} = \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z).$$

När man vet effekten av en lineär transformation på koordinater, är det lätt att skriva upp dess matris: Det ska vara den matris A som har egenskapen att

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

där (x', y', z') är koordinaterna för $P(\bar{v})$. Men dessa räknade vi ut ovanoch då ser man lätt att matrisen

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidare, för att bestämma $T : s$ matris B, kan man använda sig av att kolonnerna i dess matris(inte raderna, dödssynd!) är koordinaterna för respektive $T(\mathbf{e_1}), \mathbf{T}(\mathbf{e_2})$ samt $T(\mathbf{e_3})$. Men uttryckt i koordinater är $T(\mathbf{e_1}) = (0, 1, 0)$ så då återstår det bara att bestämma $T(\mathbf{e_2})$ och $T(\mathbf{e_3})$. Men utnyttja då lineariteten: att $T(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} +) = \mathbf{T}(\mathbf{e_1}) + \mathbf{T}(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_2} + \mathbf{T}(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, ger bums att $T(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1}$. Därmed är den andra kolonnen i matrisen $(1, 0, 0)^t$. Den tredje fås på samma sätt: $T(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) = \mathbf{T(e_1)}+\mathbf{T(e_2)}+\mathbf{T(e_3)} = \mathbf{e_1}+\mathbf{2e_2}+\mathbf{T(e_3)} = \mathbf{e_1}+\mathbf{2e_2}+\mathbf{e_3}$ ger att $T(\mathbf{e_3}) = \mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}$. Tredje kolonnen är sålunda $(0,1,1)^t$. Alltså

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

T^{-1} har då matrisen B^{-1} som man hittar med Gauss-Jordan eliminering

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den sammansatta avbildningen $R := T^{-1} \circ S_1$ har då matrisen(observera ordningen)

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

För att få fram $R(2\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3})$, notera att $2\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}$ har koordinaterna $(0,2,1)$, så att koordinaterna till $R(2\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3})$ är

$$B^{-1}A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alltså är $R(2\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) = \mathbf{2e_1} - \mathbf{e_2}$.

5 p