MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Rikard Bøgvad

Tentamensskrivning i
Matematik för naturvetenskaper II
MM4001, moment M120,
4 maj 2017

Lösningar

1. a) Modulo 30 är $31^n + 29^n + 60^n \sim 1^n + (-1)^n + 0^n$ vilket är antingen 0 eller 2, beroende på om n är udda eller jämnt. Alltså är $b_n = 0$ om n är udda, och $b_n = 2$ om n är jämnt. Då kan inte $\lim_{n\to\infty} b_n$ existera. 2.5 p

   b) Expanderar man uttrycket $(1/x - 2x^2)^{14}$ med binomialteoremet fås termer av formen

$$\binom{14}{k}(1/x)^k(-2x^2)^{14-k} = \binom{14}{k}(-2)^{14-k}x^{28-3k}.$$

   En sådan term har grad 1 om $28 - 3k = 1 \iff k = 9$. Dess koefficient blir alltså

$$-\binom{14}{9}(2)^5.$$

2.5 p

2. Linjen som är given på parameterform av $(x, y, z) = (-11, 0, 123) + t(1, 2, -1),\ t \in \mathbb{R}$ har en riktningsvektor som är $(1, 2, -1)$. Normalvektorn till funktionen $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ i en punkt $x_0, y_0, z_0)$ ses ur tangentplanets ekvation

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0),$$

   och är alltså $(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}, -1) = (2x_0 + 2y_0, 2x_0 + 4y_0, -1)$
   (ett plan med ekvationen $AX + By + Cz + D = 0$ har en normalvektor (A, B, C).) Två vektorer är parallella med varandra när den ena är en multipel av den andra, d v s här

$$(2x_0 + 2y_0, 2x_0 + 4y_0, -1) = \lambda(1, 2, -1) = (\lambda, 2\lambda, -\lambda).$$

   Genom att titta på den sista koordinaten ser man att λ är 1, och sen att $y_0 = 1$ och $x_0 = 0$.

5 p

3. Avståndet från en punkt (x_0, y_0, z_0) till ett plan $Ax + By + Cz + D = 0$ är

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

   Avståndet från $(1, 2t, t^2)$ till planet $x + y + z + 10 = 0$ är alltså $f(t) = \frac{1}{3}(|1 + 2t + t^2 + 10|)$. Polynomet $1 + 2t + t^2 + 10$ har inga nollställen(d v s det finns inga punkter på kurvan som ligger i planet). Alltså har det också samma tecken för alla reella tal, och är alltså alltid positivt(eftersom det helt klart har positiva värden). För att ta reda på minimala värdet av $f(t) = \frac{1}{3}(1 + 2t + t^2 + 10)$ deriverar vi och letar efter stationära punkter: $f'(t) = \frac{1}{3}(2 + 2t) = 0 \iff t = -1$. Eftersom $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$, så är detta ett minmum. Alltså är avståndet till planet minimalt i punkten $(1, -2, 1)$ (som svarar mot $t = -1$)och är då $f(-1) = 10/3$. 5 p

4. a) Maclaurinserien till $sinx$ är $x - x^3/3! + x^5/5! + ...$ och alltså är Maclaurinserien till $sinx^3$ helt enkelt $x^3 - (x^3)^3/3! + (x^3)^5/5! + ...$ Genom att dela med x^3 fås att serien för $f(x)$ är

$$1 - x^6/3! + x^{12}/5! - x^{18}/7! + ...$$

I följden av exponenter $0, 6, 12, 18...$ i denna serie förekommer inte 27 och eftersom man vet att MacLaurin-serien för $f(x)$ är

$$f(0) + f^{(1)}(0)x + f^{(2)}(0)x^2/2! + ... + f^{(27)}(0)x^{27}/27! + ...$$

betyder det att $f^{(27)}(0) = 0$.

2, 5 p

b) Eftersom det är ett gränsvärde när $x \to 1$ kan man inte utveckla i Maclaurinserie! Man kan enkelt utveckla i en Taylorserie kring $x = 1$, men också lite snabbare använda l'Hopitals regel två gånger(verifiera i varje steg att gränsvärdet är v formen $0/0$):

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-2\pi \sin 2\pi x}{2x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{-4\pi^2 \cos 2\pi x}{2} = -2\pi^2.$$

2, 5 p

5. a) Dubbelintegralen

$$\int\int_D (x + 2y)dxdy = \int_0^1 \Big(\int_0^{y^3} (x + 2y)dx \Big) dy.$$

Men

$$\int_0^{y^3} (x + 2y)dx = [x^2/2 + 2xy]_0^{y^3} = y^6/2 + 2y^4,$$

och

$$\int_0^1 (y^6/2 + 2y^4)dy = [y^7/14 + 2y^5/5]_0^1 = 1/14 + 2/5 = 33/70.$$

2, 5 p

b) Här är det läge att använda polära koordinater, eftersom området beskrivet i dem är givet av $r \leq \sqrt{2}$ och $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$. Alltså är

$$\int\int_D (x^3 + y^2x)dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} \Big(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (r^3(\cos\theta)r d\theta \Big) dr$$

(Observera Jacobianen r)!

Eftersom

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (r^3(\cos\theta)r d\theta = r^4[\sin\theta]_{-\pi/4}^{\pi/4} = r^4(\sqrt{2}/2 - (-\sqrt{2})/2) = r^4\sqrt{2},$$

så är dubbelintegralen $(1/5)(\sqrt{2})^5\sqrt{2} = 8/5$. 2, 5 p

6. Verkan på en vektor $\bar{v}$ med koordinater (x, y, z) av en spegling i ett plan med normalvektor $\bar{n} = (1, 1, 0)$ kan beräknas med formeln

$$S(\bar{v}) = \bar{v} - \frac{2\bar{v}\cdot\bar{n}}{\bar{n}\cdot\bar{n}}\bar{n} = (-y, -x, z),$$

eftersom $\bar{v} \cdot \bar{n} = x + y$ och $\bar{n} \cdot \bar{n} = 2$, så att

$$\frac{2\bar{v} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \bar{n} = \frac{2(x+y)}{2}(1,1,0) = (x+y, x+y, 0).$$

När man vet effekten av en lineär transformation på koordinater, är det lätt att skriva upp dess matris: Det ska vara den matris A som har egenskapen att

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

där (x', y', z') är koordinaterna för $S(\bar{v})$. Men dessa räknade vi ut, till $(-y, -x, z)$ och då ser man lätt att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidare, för att bestämma $T : s$ matris B, kan man använda sig av att kolonnerna i dess matris(inte raderna, dödssynd!) är koordinaterna för respektive $T(\mathbf{e_1}), \mathbf{T}(\mathbf{e_2})$ samt $T(\mathbf{e_3})$. Men uttryckt i koordinater är $T(\mathbf{e_1}) = (0,1,0)$ och $T(\mathbf{e_2}) = (1,1,0)$ så då återstår det bara att bestämma $T(\mathbf{e_3})$. Men utnyttja då lineariteten: $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} = \mathbf{T}(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) = \mathbf{T}(\mathbf{e_1}) + \mathbf{T}(\mathbf{e_2}) + \mathbf{T}(\mathbf{e_3}) = \mathbf{e_2} + (\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) + \mathbf{T}(\mathbf{e_3})$ och lös ut $T(\mathbf{e_3}) = \mathbf{e_3} - \mathbf{e_2}$. Alltså har $T(\mathbf{e_3})$ koordinaterna $(0,-1,1)$ och detta ger den tredje kolonnen i matrisen B för T:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

T^{-1} har då matrisen B^{-1} som man hittar med Gauss-Jordan eliminering

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den sammansatta avbildningen $R := T^{-1} \circ S_1$ har då matrisen(observera ordningen)

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

För att få fram $R(2\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3})$, notera att $2\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$ har koordinaterna $(0,2,1)$, så att koordinaterna till $R(2\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3})$ är

$$B^{-1}A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså är $R(2\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) = \mathbf{3e_1} - \mathbf{2e_2} + \mathbf{e_3}$.

5 p