Lösningar till Analys för naturvetare II, 20-08-2018

1. Beräkna resten av division med 7 av $7001^{256} + 3502^{302}$.

   Lösning.

   $$70001^{256} + 3502^{302} \simeq 1^{256} + 2^{302} \mod 7 \simeq 1 + 4 \cdot (2^3)^{100} \mod 7 \simeq 1 + 4 \cdot (1)^{100} \mod 7$$
   $$\simeq 1 + 4 \mod 7 = 5.$$

2. (a) På en lapp står ordet KALLIGRAFI. Lappen klipps sönder i bitar, så att det på varje bit står precis en bokstav. Sedan väljs fyra bitar och läggs efter varandra. Hur många olika bokstavsföljder kan bildas på detta sätt?

   Lösning.

   I ordet ingår 2 stycken A, 2 stycken I, 2 stycken L, G, K, F och D (7 olika bokstäver). Det finns $4!\binom{7}{4}$ ord med alla olika bokstäver, det finns $2 \cdot 3 \cdot \binom{4}{2}\binom{6}{2}$ ord med två likadana bokstäver och det finns $3\binom{4}{2}$ ord med två par bokstäver. Totalt 1398 ord.

   (b) Bestäm koefficienten framför x^9 i utvecklingen av uttrycket $(x + (2x)^{-2})^{21}$.

   Lösning.

   För att beräkna vilken term ger x^9, vi ställer upp en ekvation

   $$x^i \cdot (x^{-2})^{21-i} = x^9 \leftrightarrow i + (-2)(21 - i) = 9 \leftrightarrow 3i = 51 \leftrightarrow i = 17.$$

   Enligt binomialsatsen får man följande term $\binom{21}{17}x^{17} \cdot ((2x)^{-2})^4 = \binom{21}{17}(2)^{-8}x^9 = \frac{5985}{256}x^9$. Svar $\frac{5985}{256}$.

3. (Positivt orienterat ON-system) Låt L_1 vara linjen genom $(1, -1, 3)$ med riktningsvektor $(1, 1, 0)$. Den skär planet $x + y - z = 0$ i en punkt P. Bestäm P. Låt sedan L_2 vara linjen genom P som är normal till planet $x + y - z = 0$. Bestäm på normalform en ekvation för det plan som innehåller både L_1 och L_2.

   Lösning.

   L_1 ges av parametrisk framställning $(1, -1, 3) + t(1, 1, 0) = (1 + t, -1 + t, 3)$. Nät den träffar $x + y - z = 0$ då uppfyller t ekvationen $1 + t - 1 + t - 3 = 0$ dvs $t = 3/2$. Alltså $P = (5/2, 1/2, 3)$. För att hitta planet Π som innehåller L_1 och L_2 notera att dess normal är kryssprodukten av $(1, 1, -1)$ och $(1, 1, 0)$. Denna ges av

   $$N = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1, 1, 0).$$

   Alltså Π är på formen $-x + y + d = 0$ för något d. Eftersom den passerar genom $P = (5/2, 1/2, 3)$ får man $d = +2$. Svar Π ges av $-x + y + 2 = 0$.

4. Låt $f(x) = e^{-x^2} + \sin 2x - x^8$. Bestäm värdet av derivatan $f^{(8)}(0)$.

   Lösning.

Enligt Taylors formel kommer koefficienter framför x^8 i Taylorutvecklingen av f vara lika med $f^{(8)}(0)/8!$. Sedan har man

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + x^4/2! - x^6/3! + x^8/4! - x^{10}/5! + ...$$
$$\sin 2x = 2x - (2x)^3/3! + (2x)^5/5! - (2x)^7/7! + (2x)^9/9! + ...$$

Alltså

$$f(x) = 1 + 2x - x^2 - 8x^3/3! + x^4/2! + 2^5x^5/5! - x^6/3! - 2^7x^7/7! - x^8(1/4! + 1) + ...$$

Slutligen $f^{(8)}(0) = 8!(1 - 1/24) = 38640$.

5. a) Beräkna dubbelintegralen

$$I = \iint_D xydxdy,$$

där $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$

Lösning.

Man ska använda upprepad integration

$$I = \int_0^1 xdx \left[\int_0^{x^2} ydy\right] = \int_0^1 xdx \left(\frac{y^2}{2}\right)|_0^{x^2} = \int_0^1 \frac{x^5dx}{2} = \frac{x^6}{12}|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Svar. $\frac{1}{12}$.

b) Beräkna dubbelintegralen

$$J = \iint_D (4x^2 - y^2)^4 dxdy,$$

där D är fyrhörningen med hörn i $(-1, 0), (0, -2), (1, 0), (0, 2)$.

Lösning.

Man använder variabelsubstitution $u = 2x + y,\ v = 2x - y$ som är ekvivalent till $x = (u + v)/4,\ y = (u - v)/2$. Man får

$$J = \iint_{-2\leq u\leq 2,\ -2\leq v\leq 2} (uv)^4 Jac \cdot dudv,$$

där Jac är absolutbeloppet av funktionaldeterminanten $\begin{vmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$.

Alltså

$$J = \frac{1}{4}\iint_{-2\leq u\leq 2,\ -2\leq v\leq 2} (uv)^4 dudv = \int_{-2}^2 u^4du \cdot \int_{-2}^2 v^4dv = \frac{u^5}{5}|_{-2}^2 \cdot \frac{v^5}{5}|_{-2}^2 = \left(\frac{64}{5}\right)^2 = \frac{4096}{25}.$$

6. Låt e_1, e_2, e_3 vara ett positivt orienterat ON-system i rummet $\mathbb{R}^3$. Låt P_1 vara projektionen på planet $x = z$ och P_2 vara projektionen på planet $y = z$. Låt T vara en lineär transformation, som uppfyller $T(e_1) = e_2 + e_3, T(e_2) = e_1 + e_3$ samt $T(e_3) = e_1 + e_2$. Visa att T är inverterbar och bestäm matrisen för T^{-1}. Bestäm sedan matrisen till den sammansatta avbildningen $R := T^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2$.

Lösning.

Normalvektorn N av längd 1 till $x = z$ ges av $\frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$. Projektionen P_1 ges av

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z) - ((x, y, z) \cdot N)N = (x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{2}}(x - z)\frac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{z - x}{2}, y, \frac{z - x}{2}\right).$$

Man har $P_1(e_1) = (1/2, 0, 1/2)$, $P_1(e_2) = (0, 1, 0)$, $P_1(e_3) = (1/2, 0, 1/2)$. I matrisform ges P_1 av $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Normalvektorn K av längd 1 till $y = z$ ges av $\frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}$. Projektionen P_2 ges av

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z) - ((x, y, z) \cdot K)K = (x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y - z)\frac{(0, 1, -1)}{\sqrt{2}} = \left(x, \frac{y - z}{2}, \frac{y - z}{2}\right).$$

Man har $P_2(e_1) = (1, 0, 0)$, $P_2(e_2) = (0, 1/2, 1/2)$, $P_2(e_3) = (0, 1/2, 1/2)$. I matrisform ges P_2 av $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

I matrisform ges T av $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Eftersom $\det T = 2$ så är T är inverterbar. Med hjälp av Gausseleimination fås $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Slutligen,

$$T^{-1} \cdot P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$