MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sven Raum

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
Mars 18, 2022

15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

1. (a) **(2 poäng)** Definera begreppen ”vektorrum” och ”delrum”.

   (b) **(3 poäng)** Låt $T : \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vara den linjära avbildningen som uppfyller

   $$T(A) = BAC^* .$$

   där

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   Bestäm $\mathrm{N}(T)$ och $\mathrm{R}(T)$ och hitta en bas till $\mathrm{N}(T)$.

2. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppen ”normal matris” och ”självadjungerad matris”.

   (b) **(1 päng)** Redovisa ett exempel av en normal reell matris som är inte diagonaliserbar.

   (c) **(2 poäng)** Låt

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}) ,$$

   där $a, b, c \in \mathbb{C}$. Bestäm för vilka parameter a, b, c matrisen A är diagonaliserbar relativt till en ortonormalbas av $\mathbb{C}^3$.

   (d) **(1 poäng)** Låt

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) ,$$

   där $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestäm för vilka parameter a, b, c matrisen A är diagonaliserbar relativt till en ortonormalbas av $\mathbb{R}^3$.

3. (a) **(1 poäng)** Definera begrepet ”adjungerad linjär avbilding”.

   (b) **(2 poäng)** Betrakta rummet $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ med inre produkten

   $$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t .$$

   Hitta en ortonormalbas för $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ med denna inre produkt.

   (c) **(2 poäng)** Betrakta linjära avbildningen $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ som uppfyller

   $$T(p) = p(2)1 \qquad \text{för alla } p \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) .$$

   Beräkna adjungerade avbildningen av T relativt till inre produkten från del b).

4. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”isometrisk linjär avbildning”.
   (b) **(1 poäng)** Definiera begreppen ”unitär linjär avbildning” och ”ortogonal linjär avbildning”.
   (c) **(3 poäng)** Beräkna en QR-uppdelningen av

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \,.$$

5. (a) **(1 poäng)** Formulera en sats som beskriver singulärvärdena av en linjär avbildning mellan ändligdimensionella inre-produktrum.
   (b) **(4 poäng)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \,.$$

6. (a) **(1 poäng)** Bevisa att egenvärdena av en matris A är precis rötterna av dess karaktäristiska polynomet χ_A.
   (b) **(4 poäng)** Bevisa att $\mathrm{rang}(PAQ) = \mathrm{rang}(A)$ gäller för alla matriser $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ och alla inverterbara matriser $P \in \mathrm{M}_m(\mathbb{F})$, $Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, där $\mathbb{F}$ är en godtycklig kropp.

Rättningen av tentan kommer att klaras ungefär 2 veckor efter tentanskrivning. Därefter kan en elektronisk kopia av tentan beställas från studentexpeditionen genom länken https://survey.su.se/Survey/42570/sv.