MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Sven Raum

Tentamensskrivning i
Linjär algebra, MM5012
7.5 hp
Mars 18, 2022

15 poäng ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant. Obevisade deluppgifter kan användas.

1. (a) **(2 poäng)** Definera begreppen ”vektorrum” och ”delrum”.
   (b) **(3 poäng)** Låt $T : \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ vara den linjära avbildningen som uppfyller

$$T(A) = BAC^* .$$

där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestäm $\mathrm{N}(T)$ och $\mathrm{R}(T)$ och hitta en bas till $\mathrm{N}(T)$.

Lösning

(a) Ser bok eller föreläsningsanteckningar. Observera också att ekvivalenta definitioner accepteras.

(b) Vi förenklar först formeln för $T(A)$ och får

$$\begin{aligned}
T(A) &= BAC^* \\
&\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} - i(a_{12} + a_{22}) & a_{11} + a_{21} - a_{13} - a_{23} a_{11} - i a_{12} & a_{11} - a_{13} \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Nu visar vi att T är surjektiv, dvs $\mathrm{R}(T) = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ genom att visa att det finns ett generande delmängd för $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ i $\mathrm{R}(T)$. Faktiskt gäller

$$\begin{aligned}
T(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
T(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
T(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
T(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

En kort räkning visar att alla standardbasis vektorer ligger i linjär höljden av denna matriser, så att vi kan dra slutsatsen $\mathrm{R}(T) = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Dimensionsatsen implicera att $\dim \mathrm{N}(T) = 6 - \dim \mathrm{R}(T) = 2$. För att hitta en bas av $\mathrm{N}(T)$ ska det alltså vara tillräklig att finna två icke-kolinjära vektorer i $\mathrm{N}(T)$. Om β

är standard ordnad basen av $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ och γ är standard ordnad basen av $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, så visar beräkningen övanför att

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Vi kan nu beräkna en bas för nolrummet av matrisen $[T]_\beta^\gamma$ och översätta det till en bas för nolrummet av T. Gauseliminering ger

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & i & 0 \\ 0 & i & -1 & -1 & i & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

en bas för

$$\mathrm{N}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -ia & a \\ b & -ib & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C} \right\} .$$

2. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppen ”normal matris” och ”självadjungerad matris”.
   (b) **(1 päng)** Redovisa ett exempel av en normal reell matris som är inte diagonaliserbar.
   (c) **(2 poäng)** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}),$$

där $a, b, c \in \mathbb{C}$. Bestäm för vilka parameter a, b, c matrisen A är diagonaliserbar relativt till en ortonormalbas av $\mathbb{C}^3$.

   (d) **(1 poäng)** Låt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),$$

där $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestäm för vilka parameter a, b, c matrisen A är diagonaliserbar relativt till en ortonormalbas av $\mathbb{R}^3$.

Lösning

(a) Ser bok eller föreläsningsanteckningar.

(b) Icke-diagonaler rotationsmatriser ger sådan exempel. Vi kan tar till exempel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Då gäller att

$$AA^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = I_2 = A^*A.$$

Samntidigt ser vi att karaktäristiska polynomet

$$\chi_A(t) = \det(A - tI_2) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 + 1$$

splitrar inte över reela tal, så att A är inte diagonaliserbar.

(c) Vi använder att komplexa matrisen $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ är diagonaliserbar relativt till en ortonormalbas av $\mathbb{C}^3$ om och endasat om A är normal. Vi beräknar alltså AA^* samt med A^*A och jämföra dera koefficienter.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + |a|^2 & \overline{b}a & a\overline{c} \\ \overline{a}b & |b|^2 & b\overline{c} \\ \overline{a}c & \overline{b}c & |c|^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ \overline{a} & |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 & \overline{c} \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan alltså dra slutsatsen att A är diagonaliserbar relativt till en ortonormalbas av $\mathbb{C}^3$ om och endasat om $a = 0 = c$ gäller.

(d) Vi använder att reela matrisen $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ är diagonaliserbar relativt till en ortonormalbas av $\mathbb{R}^3$ om och endasat om A är självadjungerad. Då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = A^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ser vi att A är diagonaliserbar relativt till en ortonormalbas av $\mathbb{R}^3$ om och endasat om $a = 0 = c$ gäller.

3. (a) **(1 poäng)** Definera begreppet ”adjungerad linjär avbilding”.
   (b) **(2 poäng)** Betrakta rummet $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ med inre produkten

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t\,.$$

   Hitta en ortonormalbas för $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ med denna inre produkt.
   (c) **(2 poäng)** Betrakta linjära avbildningen $T : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ som uppfyller

$$T(p) = p(2)1 \qquad \text{för alla } p \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})\,.$$

   Beräkna adjungerade avbildningen av T relativt till inre produkten från del b).

Lösning

(a) Ser bok eller föreläsningsanteckninger.

(b) För att hitta en ortonormalbas tillämper vi Gram-Schmidts metod med normalisering till standard basen $1, x, x^2 \in \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$. Vi skriver $v_1 = 1$, $v_2 = x$ och $v_3 = x^2$. Sen blir $w_1 = 1$ och

$$\|w_1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x = 2$$

Då blir alltså $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}1$.
Vi forstättar beräkningen med observationen

$$\langle v_2, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}}x\mathrm{d}x = 0$$

för att x är en udda funktion. Alltså gäller

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 = x\,.$$

Dessutom får vi

$$\|w_2\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\,.$$

Alltså blir

$$u_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}w_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x\,.$$

Till slut beräknar vi

$$\langle v_3, u_1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\frac{1}{\sqrt{2}}1\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,,$$

och vi observerar att

$$\langle v_3, u_2\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\sqrt{\frac{3}{2}}x\mathrm{d}x = 0$$

för att x^3 är en udda funktion. Alltså får vi

$$w_3 = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}1 = x^2 - \frac{1}{3}\,.$$

Nu blir

$$\begin{aligned}
\|w_3\|^2 &= \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{5}2 - \frac{2}{9}2 + \frac{2}{9} \\
&= \frac{2}{5} - \frac{2}{9} \\
&= \frac{18-10}{45} \\
&= \frac{8}{45}\,.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$u_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}(x^2 - \frac{1}{3}) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3})\,.$$

Sammanfatningsvis är en ortonormalbas av $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ med given inre-produkt

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3})\,.$$

(c) Enklaste sätt att beräkna adjungerad avbildningen är genom att använder en matrisrepresentation relativt till en ortonormalbas. Vi kommer ihåg att

$$\beta = (u_1, u_2, u_3) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3}))$$

är en ortonormalbas för $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
T(u_1) &= T(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = u_1 \\
T(u_2) &= T(\sqrt{\frac{3}{2}}x) = \sqrt{6} = 2\sqrt{3}u_1 \\
T(u_3) &= T(\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3})) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(4 - \frac{1}{3}) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\frac{11}{3} = \frac{11\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{5}}{2}u_1\,.
\end{aligned}$$

Alltså gäller

$$[T^*]_\beta = [T]_\beta^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{3} & \frac{11\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \frac{11\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Det innebär att u_1 är enda vektor från ortonormalbasen β som inte avbildas till nolvektorn.

$$\begin{aligned}
T^*(u_1) &= 1u_1 + 2\sqrt{3}u_2 + \frac{11\sqrt{5}}{2}u_3 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{2}}x + \frac{11\sqrt{5}}{2}\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}x + \frac{11\cdot 5\cdot 3}{4\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3}) \\
&= \frac{4-55}{4\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}x + \frac{165}{4\sqrt{2}}x^2 \\
&= \frac{-51}{4\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}x + \frac{165}{4\sqrt{2}}x^2 \,.
\end{aligned}$$

Vi kan nu beräkna värde för T^* på standardbasen.

$$\begin{aligned}
T^*(1) &= \sqrt{2}T^*(\frac{1}{\sqrt{2}}) \\
&= \sqrt{2}T^*(u_1) \\
&= \frac{-51}{4} + 6x + \frac{165}{4}x^2 \,,
\end{aligned}$$

Dessutom får vi

$$T^*(x) = 0$$

och

$$\begin{aligned}
T^*(x^2) &= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}T^*(\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3})) + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}T^*(\frac{1}{3}) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}T^*(u_3) + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\frac{1}{3}T^*(u_1) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}\frac{1}{3}(\frac{-51}{4} + 6x + \frac{165}{4}x^2) \\
&= \frac{-17}{3\sqrt{10}} + \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}x + \frac{55}{3\sqrt{10}}x^2 \,.
\end{aligned}$$

4. (a) **(1 poäng)** Definiera begreppet ”isometrisk linjär avbildning”.
   (b) **(1 poäng)** Definiera begreppen ”unitär linjär avbildning” och ”ortogonal linjär avbildning”.
   (c) **(3 poäng)** Beräkna en QR-uppdelningen av

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})\,.$$

Lösning

(a) Ser bok eller föreläsningsanteckningar.
(b) Ser bok eller föreläsningsanteckningar.
(c) Genom att använder Gram-Schmidts metod på kolonvektorer av A hittar vi att $A = QR$ med

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (a) **(1 poäng)** Formulera en sats som beskriver singulärvärdena av en linjär avbildning mellan ändligdimensionella inre-produktrum.
   (b) **(4 poäng)** Beräkna en singulärvärdesuppdelning av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lösning

(a) Ser bok eller föreläsningsanteckningar.
(b) På grund av ett fel i tentamensupprättning blir matrisen A orimligt svår att räkna med. En lösning som beskriver metoden för beräkningen av singulärvärdesuppdelning får alltså alla poäng.

6. (a) **(1 poäng)** Bevisa att egenvärdena av en matris A är precis rötterna av dess karaktäristiska polynomet χ_A.
   (b) **(4 poäng)** Bevisa att $\operatorname{rang}(PAQ) = \operatorname{rang}(A)$ gäller för alla matriser $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ och alla inverterbara matriser $P \in \mathrm{M}_m(\mathbb{F})$, $Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, där $\mathbb{F}$ är en godtycklig kropp.

Lösning

(a) Ser bok eller föreläsningsanteckningar.
(b) Ser bok eller föreläsningsanteckningar.