Hemtenta Sannolikhetsteori II 18 augusti 2020

$\boxed{1}$ En multivariat normal slumpvektor X med kovarians-matris Λ har en täthet om och endast om $\det(\Lambda) > 0$. Eftersom

$$\det(\Lambda_1) = \det(\Lambda_2) = 0$$
$$\det(\Lambda_3) = 5$$

så finns en täthet endast i fallet Λ_3. 3p

$\boxed{2}$ Eftersom N är icke-negativ och heltalsvärd, samt oberoende av $X_1, X_2, \ldots$ så gäller enl. sats att

$$\mathbb{E}[Y_N] \overset{\text{sats}}{=} \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[N] = p \cdot \lambda.$$ 3p

$\boxed{3}$ MGF för en stokastisk variabel X definieras

$$\psi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}],$$

förutsatt att HL är ändligt. Vi får för $t \neq 0$

$$\psi_X(t) = \int_0^4 e^{tx} \cdot \frac{1}{4}\,dx = \left[\frac{1}{4t} e^{tx}\right]_0^4 = \frac{e^{4t}-1}{4t}.$$ 2p

$$\psi_Y(t) = \int_0^1 e^{ty} \cdot \frac{2}{3}\,dy + \int_1^3 e^{ty} \cdot \frac{1}{6}\,dy$$
$$= \left[\frac{2}{3t} e^{ty}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6t} e^{ty}\right]_1^3$$
$$= \frac{2(e^t - 1)}{3t} + \frac{e^{3t} - e^t}{6t} = \frac{e^{3t} + 3e^t - 1}{6t}.$$ 2p

(För $t = 0$ gäller per definition $\psi_X(0) = \psi_Y(0) = 1$.)

$\boxed{4}$ Marginaltätheten för Y fås av formeln

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$
$$= \int_1^2 \frac{1}{48}\left(3x^2y - 6x^2 - y + 2\right)dy$$

för $y \in [2,6]$, och är f övrigt noll. För $y \in [2,6]$ får vi

$$f_Y(y) = \int_1^2 \frac{1}{48}\left(3x^2y - 6x^2 - y + 2\right)dx$$
$$= \frac{1}{48}\Big[x^3y - 2x^3 - xy + 2x\Big]_1^2$$
$$= \frac{1}{48}\Big(8y - 16 - 2y + 4\Big) = \frac{1}{8}(y-2).$$

2p

Till sist är X och Y oberoende om och endast om $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ för alla x och y. För $x \in [0,2]$ och $y \in [2,6]$ har vi

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{6}(3x^2-1)\cdot\frac{1}{8}(y-2) = \frac{1}{48}(3x^2y - 6x^2 - y + 2)$$

vilket ger $f_{X,Y}(x,y)$. I övriga fall är båda led noll. Alltså är X och Y oberoende.

3p

$\boxed{5}$ Låt Y vara likformigt fördelad på $[0,1]$. Observera att

$$F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}(Y_n \le y) = \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \le y\right) = \mathbb{P}(X_n \le yn),$$

vilket ger 0 för $y \le 0$ och 1 för $y > 1$. Det återstår att visa att för $y \in (0,1]$ gäller

$$F_{Y_n}(y) \to F_Y(y) = y \qquad \text{då } n \to \infty.$$

3p

För $y \in (0,1]$ får vi

$$\mathbb{P}(Y_n \le y) = \int_0^{yn} f_n(x)\,dx$$
$$= c_n \int_0^{yn} (1+e^{-x})\,dx$$
$$= c_n \left[x - e^{-x}\right]_0^{yn}$$
$$= \frac{yn - e^{-yn} + 1}{n+1-e^{-n}} \to y \text{ då } n \to \infty.$$ 2p

$\boxed{6}$ (a) Vi kan uttrycka Y som $Y = BX$, där

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Enligt sats är därmed Y multivariat normal med 2p

$$\mathbb{E}[Y] = B\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Cov}(Y) = B\Lambda B' = B\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$ 2p

En täthet existerar för Y då $\det(Y) = 3 > 0$. 1p

(b) Enligt sats är komponenterna av en multivariat normal oberoende om och endast om de är okorrelerade. Ur $\mathrm{Cov}(Y)$ ser vi att Y_3 är oberoende av Y_1 och Y_2, samt att $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = 1$. Därmed gäller 3p

$$\mathbb{E}[X_1(X_2-X_1)(X_1+X_3-X_2)] = \mathbb{E}[Y_1Y_2Y_3]$$
$$= \mathbb{E}[Y_1Y_2]\cdot\mathbb{E}[Y_3]$$
$$= \Big(\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)+\mathbb{E}[Y_1]\,\mathbb{E}[Y_2]\Big)\,\mathbb{E}[Y_3]$$
$$= (1+1\cdot(-1))\cdot 2 = 0.$$ 2p

$\boxed{7}$ ⓐ Enligt uppgift gäller

$$\mathbb{P}(X=k) = c\cdot k \qquad \text{för } k=1,2,\dots,6,$$

där c är en konstant. För att summera till 1 måste vi ha $c = \frac{1}{1+2+\dots+6} = \frac{1}{21}$. 2p

SGF för X fås av formeln

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\cdot\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{6} t^k\cdot\frac{k}{21}$$
$$= \frac{1}{21}\left(t+2t^2+3t^3+4t^4+5t^5+6t^6\right).$$ 2p

ⓑ Massfunktionen för Y fås från g_Y via derivering, där

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{g_Y^{(k)}(0)}{k!}.$$ 2p

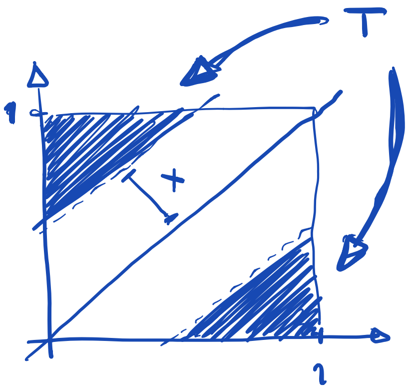
Eftersom tärningskasten är oberoende gäller

$$g_Y(t) \overset{\text{sats}}{=} g_X(t)^3 = \frac{1}{21^3}\left(t+2t^2+3t^3+4t^4+5t^5+6t^6\right)^3.$$ 2p

SGF för Y är därmed ett polynom av grad 18. Derivatan av ordning 19 är därmed konstant lika med noll. Alltså

$$\mathbb{P}(Y=19)=0.$$ 2p

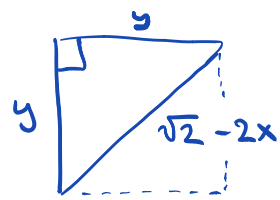
8 (a) Notera att $\{D > x\}$ är händelsen att punkten $(X,Y)'$ hamnar minst distans x från diagonalen. Detta motsvaras av två triangelformade områden inom kvadraten som vi tillsammans betecknar med T.



Eftersom $(X,Y)'$ är likformigt vald gäller

$$\mathbb{P}(D > x) = \frac{\text{area}(T)}{\text{total area}} = \text{area}(T). \qquad 2p$$

Tillsammans bildar trianglarna en kvadrat vars diagonal mäter $\sqrt{2} - 2x$. Sidlängden y på denna kvadrat är $y = 1 - \sqrt{2}x$, och arean därmed $(1-\sqrt{2}x)^2$.



Därmed får vi

$$\mathbb{P}(D > x) = (1-\sqrt{2}x)^2 \quad \text{för } x \in [0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}]. \qquad 3p$$

(b) Låt $Z_n = \max\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$. Vi vill visa att

$$\mathbb{P}\left(\left|Z_n - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right| > \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{då } n \to \infty$$

för varje $\varepsilon > 0$. Eftersom $Z_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ är detta samma som att visa att för varje $\varepsilon > 0$ gäller

$$\mathbb{P}\left(Z_n < \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{då } n \to \infty. \qquad 2p$$

Vi får att

oberoende

$$\mathbb{P}\left(Z_n < \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(D < \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\right)^n$$
$$= \left(1 - (1 - 1 + \sqrt{2}\varepsilon)^2\right)^n$$
$$= (1 - 2\varepsilon^2)^n$$

vilket går mot noll då $n \to \infty$ för alla $\varepsilon > 0$. 3p

9 ⓐ Låt X ange utdelningen under de N första spelen vid spel med Emirs strategi. Då N anger antal spel till första förlust gäller ($N-1$ omgångar vinst, sista ger förlust):

$$X = \sum_{k=1}^{N-1} k - N = \frac{(N-1)\cdot N}{2} - N. \qquad 3p$$

Eftersom N har en första-gången fördelning med parameter $p = 2/3$ så ger tabell att $\mathbb{E}[N] = \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$ och $\mathrm{Var}(N) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{3}{4}$. Därmed

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\frac{N^2}{2} - \frac{3N}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Var}(N) + \mathbb{E}[N]^2\right) - \frac{3}{2}\mathbb{E}[N]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}. \qquad 2p$$

ⓑ Eftersom omgångarna kan anses oberoende så är Z_{N_k} lika (i fördelning) med summan av k oberoende variabler fördelade som Y. Enligt stora talens lag gäller därmed att

$$\frac{Z_{N_k}}{k} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[Y].$$

På samma sätt får vi att

$$\frac{N_k}{k} \xrightarrow{P} \mathbb{E}[N]. \qquad 3p$$

Via sats (t.ex. Cramér-Slutsky) följer det att

$$\frac{Z_{N_k}}{N_k} = \frac{Z_{N_k}}{k} \cdot \frac{k}{N_k} \xrightarrow{P} \frac{\mathbb{E}[Y]}{\mathbb{E}[N]} = -\frac{1}{2}. \qquad 2p$$