MT5002 – Sannolikhetsteori II – (hem-)tentamen

Datum Måndag 16 augusti, 2021
Examinator Daniel Ahlberg
Hjälpmendel Kursboken samt annan litteratur, bekräkningsprogram, etc. Samarbete eller annan assistens av någon person är ej tillåten.
Bedömning Tentamen består av en basdel och en betygsgrundande del, vilka består av 20 respektive 40 poäng var. Vid godkänt resultat på basdelen rättas även den betygsgrundande delen, vilken bestämmer betyget. För högre betyg (A och B) krävs, utöver uppnådd poängnivå, att lösningarna som helhet bedöms välskrivna och välmotiverade. Ett antal inlämningsuppgifter under kursens gång har kunnat generera upp till sex bonuspoäng, vilka räknas in i den betygsgrundande delen. Följande gränser gäller för att uppnå de olika betygsstegen (bonuspoäng inräknade):

	A	B	C	D	E
Basdel					14
Betygsgrundande del	40	30	20	10	0

Välmotiverade och fullständiga lösningar krävs för full poäng. Partiella lösningar kan också ge poäng.

Försäkran. Dina inlämnade lösningar behöver innehålla ditt namn samt följande passage för att bli godkända: *Jag försäkrar på heder och samvete att jag inte fått hjälp av någon annan person för att lösa dessa uppgifter.*

Basdel

Uppgift 1. Låt X_1, X_2 och X_3 vara oberoende $N(0,1)$-, $N(1,2)$- respektive $N(2,3)$-fördelade stokastiska variabler. Sätt $Y_1 = X_2 - X_1$ och $Y_2 = X_3 - X_1$. Bestäm fördelningen för $Y = (Y_1, Y_2)'$. (4p)

Uppgift 2. Låt $(X, Y)'$ vara en slumpvektor vars täthet ges av

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}e^{-x} \quad x \geq 0, 0 \leq y \leq 2.$$

Beräkna $\psi_{X+Y}(1/2)$, dvs värdet av den momentgenererande funktionen för $X + Y$ i punkten $t = 1/2$. (4p)

Uppgift 3. Låt $(X, Y)'$ vara en slumpvektor sådan att Y är standard normalfördelad och den betingade fördelningen för X, givet $Y = y$, är exponentialfördelad med väntevärde y^2. Visa att X och Y är okorrelerade. (4p)

Uppgift 4. Placera n punkter, oberoende av varandra, på intervallet $[0, 1]$ enligt den likformiga fördelningen. Låt M_n ange avståndet från origo till den punkt som ligger närmast origo. Visa att $M_n \to 0$ i sannolikhet då $n \to \infty$. (4p)

Uppgift 5. Avgör vilka två av följande matriser som ej utgör kovariansmatriser för någon slumpvektor. Motivera ditt svar. (4p)

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Betygsgrundande del

Uppgift 6. Låt $(X, Y, Z)'$ vara en kontinuerlig slumpvektor med täthetsfunktion

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \frac{1}{24}(xy + 2y), \qquad 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2.$$

(a) Visa att X, Y och Z är oberoende. (4p)

(b) Bestäm de momentgenererande funktionerna för Y, Z samt $Y + Z$. (6p)

Uppgift 7. Låt $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)'$ vara en multivariat normalfördelad slumpvektor med väntevärdesvektor μ och kovariansmatris Λ givna av

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Låt $U = (X_1, X_2 - X_1)'$ och $V = (X_3 - X_4, X_4)'$.

(a) Bestäm fördelningarna för U och V. (4p)

(b) Avgör om U och V har täthetsfunktioner eller ej. (2p)

(c) Beräkna $\mathbb{E}[X_1(X_2 - X_1)(X_3 - X_4)X_4]$. (4p)

Uppgift 8. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende och likafördelade stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians 1, och sätt $Y_k = (-1)^k X_k$.

(a) Låt $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k^2$. Visa att $\frac{1}{n} T_n$ konvergerar i sannolikhet då $n \to \infty$ och bestäm gränsvärdet. (4p)

(b) Låt $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Visa att $\frac{1}{\sqrt{n}} S_{2n}$ konvergerar i fördelning då $n \to \infty$ och bestäm gränsfördelningen. (6p)

Uppgift 9. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara icke-negativa och heltalsvärda stokastiska variabler som konvergerar i fördelning, då $n \to \infty$, mot en icke-negativ och heltalsvärd stokastisk variabel X.

(a) Antag att det finns ett heltal $M \geq 1$ sådant att $\mathbb{P}(X_n \leq M) = 1$ för alla $n = 1, 2, \ldots$. Visa att också $\mathbb{P}(X \leq M) = 1$. (6p)

(b) Visa att $p_{X_n}(k) \to p_X(k)$ då $n \to \infty$ för varje $k \geq 0$. (4p)

Ledning: Fördelningsfunktionerna för samtliga variabler är konstanta på intervallet $[k, k + 1)$, och därmed kontinuerliga på $(k, k + 1)$, för varje $k \in \mathbb{Z}$.