Lösningar hemtenta Sannolikhetsteori II VT21

omtenta 16 augusti

Basdel

$\boxed{1}$ Eftersom X_1, X_2, X_3 är oberoende och normalfördelade så kommer $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3)$, enligt sats, att vara multivariat normal med

$$\mu = \mathbb{E}[\bar{X}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \mathrm{Cov}(\bar{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2p

Vi har $\bar{Y} = B\bar{X}$, där

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt sats är därmed $\bar{Y} \sim N(B\mu, B\Lambda B')$.

$$B\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B\Lambda B' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2p

$\boxed{2}$ En kort beräkning ger att de marginella täthetsfunktionerna för $\bar{X}$ och $\bar{Y}$ ges av

$$f_{\bar{X}}(x) = \int_0^2 \tfrac{1}{2} e^{-x}\, dy = e^{-x} \quad \text{för } x \geq 0$$

$$f_{\bar{Y}}(y) = \int_0^{\infty} \tfrac{1}{2} e^{-x}\, dx = \tfrac{1}{2} \quad \text{för } y \in [0,2].$$

Dessa känner vi igen som exponential- och likformig fördelning. Eftersom $f_{\bar{X},\bar{Y}}(x,y) = f_{\bar{X}}(x) f_{\bar{Y}}(y)$ för alla x och y så är $\bar{X}$ och $\bar{Y}$ oberoende.

2p

Ur tabell, eller genom beräkning, finner vi MGF:

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \cdot e^{-x}\, dx \underset{t<1}{=} \frac{1}{1-t}$$

$$\psi_Y(t) = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{ty}\, dy = \frac{1}{2t}\left[e^{ty}\right]_0^2 \underset{t\neq 0}{=} \frac{1}{2t}(e^{2t}-1)$$

Enligt sats för MGF följer det att

$$\psi_{X+Y}(1/2) = \psi_X(1/2) \cdot \psi_Y(1/2) = 2 \cdot (e-1).$$ 2p

$\boxed{3}$ Vi har att $Y \sim N(0,1)$ samt $X \mid Y=y \sim \exp(y^2)$.

Kovariansen ges av

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Enligt uppgift är $\mathbb{E}[Y]=0$, så vi beräknar $\mathbb{E}[XY]$. 1p

Enligt ovan är

$$\mathbb{E}[X \mid Y=y] = y^2.$$

Räkneregler för betingat väntevärde ger

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &\overset{\text{sats}}{=} \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[XY \mid Y]\big] \\ &= \mathbb{E}\big[Y\, \mathbb{E}[X \mid Y]\big] \\ &= \mathbb{E}[Y^3] \end{aligned}$$ 2p

Tredjemomentet $\mathbb{E}[Y^3]$ av en standard normalfördelning är noll på grund av symmetri. 1p

4 Låt X_k ange avstånd från origo till punkt k. Då punktes placeras likformigt på $[0,1]$ gäller

$$F_{X_k}(x) = \mathbb{P}(X_k \leq x) = x \qquad \text{för } x \in [0,1].$$

(Observera att en punkts position sammanfaller med dess avstånd till origo.) 2p

Då $M_n \geq 0$ och punkter placeras oberoende får vi för $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|M_n| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(M_n > \varepsilon) \\ &\overset{\text{oberoende}}{=} \mathbb{P}(X_k > \varepsilon)^n \\ &= (1-\varepsilon)^n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.\end{aligned}$$

2p

Därmed gäller $M_n \xrightarrow{P} 0$.

5 En kovariansmatris är alltid symmetrisk och positivt semidefinit. Det senare implicerar att determinanten är icke-negativ. Δ_4 är ej symmetrisk och kan därför inte vara en kovariansmatris. Determinanten av Δ_3 är 2p

$$\det(\Delta_3) = 1 - 4 = -3$$

så Δ_3 kan ej vara en kovariansmatris. 2p

(Däremot kan en kontrollera att Δ_1 och Δ_2 är symmetriska och positivt semidefinita, tex genom att kontrollera att alla subdeterminanter är icke-negativa.)

Betygsgrundande del

$\boxed{6}$ a) För att avgöra oberoende beräknar vi de marginella täthetsfunktionerna.

$$f_X(x) = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{24}(xy+2y)\,dy\,dz$$

$$= \frac{1}{24}(x+2)\int_0^2 y\,dy \int_0^2 dz$$

$$= \frac{1}{6}(x+2) \qquad \text{för } x \in [0,2]$$

$$f_Y(y) = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{24}(xy+2y)\,dx\,dz$$

$$= \frac{1}{24}\,y\int_0^2 (x+2)\,dx \int_0^2 dz$$

$$= \frac{1}{2}y \qquad \text{för } y \in [0,2]$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{24}\int_0^2 (x+2)\,dx \int_0^2 y\,dy$$

$$= \frac{1}{2} \qquad \text{för } z \in [0,2]$$

Därmed gäller

$$f_X(x)\,f_Y(y)\,f_Z(z) = f_{X,Y,Z}(x,y,z)$$

för alla $x,y,z \in [0,2]$, samt båda uttryck är noll i övrigt. Därmed gäller oberoendet.

4p

(b) Vi beräknar MGF för Y med partiell integration:

$$\psi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \int_0^2 e^{ty} \cdot \frac{1}{2} y \, dy$$
$$= \left[\frac{1}{2t} y e^{ty}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2t} e^{ty} \, dy$$
$$= \frac{1}{t} e^{2t} - \left[\frac{1}{2t^2} e^{ty}\right]_0^2$$
$$= \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}\right) e^{2t} + \frac{1}{2t^2}.$$

$$\psi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{tZ}] = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{tz} dz$$
$$= \left[\frac{1}{2t} e^{tz}\right]_0^2$$
$$= \frac{1}{2t}\left(e^{2t} - 1\right).$$

4p

Då Y och Z är oberoende får vi enligt sats MGF av $Y+Z$ via multiplikation:

$$\psi_{Y+Z}(t) = \psi_Y(t) \cdot \psi_Z(t)$$
$$= \left[\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}\right) e^{2t} + \frac{1}{2t^2}\right] \frac{1}{2t}\left(e^{2t} - 1\right)$$

2p

$\boxed{7}$ (a) Vi har $U = AX$ och $V = BX$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enligt sats är $U \sim N(A\mu, A\Lambda A')$ och $V \sim N(B\mu, B\Lambda B')$ där 2p

$$A\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\Lambda A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B\Lambda B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2p

(b) En multivariat normalfördelad slumpvektor har en täthet om och endast om kovariansmatrisen är inverterbar.

$$\det(A\Lambda A') = 4 - 1 = 3$$
$$\det(B\Lambda B') = 1 - 1 = 0$$

Därmed har U en täthet men inte V. 2p

(c) Från kovariansmatrisen för X kan vi utläsa, enligt sats, att $(X_1, X_2)'$ är oberoende av $(X_3, X_4)'$. Därmed gäller

$$E[X_1(X_2 - X_1)(X_3 - X_4)X_4]$$
$$\overset{\text{oberoende}}{=} E[X_1(X_2 - X_1)]\, E[(X_3 - X_4)X_4] \qquad 2p$$
$$= E[U_1 U_2]\, E[V_1 V_2]$$
$$= \mathrm{Cov}(U_1, U_2)\, \mathrm{Cov}(V_1, V_2)$$
$$\overset{\text{ur k-matris}}{=} 1 \cdot 1 = 1 \qquad 2p$$

8 a) Vi har $T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$. Termerna i denna summa är iid med ändligt väntevärde $E[X_k^2] = Var(X_k) = 1$. Enligt stora talens lag gäller, då $n \to \infty$,

$$\frac{1}{n} T_n \xrightarrow{P} E[X_k^2] = 1.$$

4p

b) Termerna i $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ är oberoende, men inte (nödvändigtvis) likafördelade. Däremot har alla termer med udda index lika fördelning, och alla termer med jämna index har samma fördelning.

2p

Sätt

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} Y_{2k} = \sum_{k=1}^{n} X_{2k}$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} Y_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} -X_{2k-1}$$

Centrala gränsvärdessatsen ger därmed, då $n \to \infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} A_n \xrightarrow{d} A \sim N(0,1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} B_n \xrightarrow{d} B \sim N(0,1)$$

2p

Eftersom oberoende får vi enligt sats

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} (A_n + B_n) \xrightarrow{d} A + B,$$

vilket är $N(0,2)$-fördelat.

2p

$\boxed{9}$ (a) Eftersom X är heltalsvärd så är fördelningsfunktionen för X konstant på intervallet $[k, k+1)$ för varje heltal k. Därmed gäller

$$F_{X_n}(x) \to F_X(x) \quad \text{då } n \to \infty$$

för varje x som ej är ett heltal. 2p

Eftersom X är heltalsvärd gäller

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \le M) &= \mathbb{P}(X \le M + 1/2) \\ &= F_X(M + 1/2) \qquad 2p \\ &= \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(M + 1/2) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \le M + \tfrac{1}{2}) \\ &= 1. \qquad 2p \end{aligned}$$

(b) På nytt får vi, då variabler heltalsvärda, att för varje heltal k

$$\begin{aligned} p_{X_n}(k) &= \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \mathbb{P}(k - \tfrac{1}{2} < X_n \le k + \tfrac{1}{2}) \\ &= F_{X_n}(k + \tfrac{1}{2}) - F_{X_n}(k - \tfrac{1}{2}) \qquad 2p \\ &\to F_X(k + \tfrac{1}{2}) - F_X(k - \tfrac{1}{2}) \\ &= \mathbb{P}(k - \tfrac{1}{2} < X \le k + \tfrac{1}{2}) \\ &= \mathbb{P}(X = k) = p_X(k). \qquad 2p \end{aligned}$$