STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematik,

Tentamen i
Algebra och kombinatorik
05 januari 2021 kl $09^{00} - 14^{00}$

Hjälpmedel: kursbok och anteckningar. Alla svar skall motiveras!

Uppgift 1. Låt $\pi = (1\ 4\ 6)(2\ 3\ 7)(5)$ och $\sigma = (1)(2\ 7\ 3)(4\ 6\ 5)$ vara permutationer i S_7.

(1p) Vad är $\operatorname{sgn}(\pi)$?

(2p) Beräkna $\pi\sigma$ och π^{-1}. Svara i cykelform.

(2p) Finns det $\tau \in \mathrm{S}_7$ så att $\pi = \tau\sigma\tau^{-1}$? Motivera ditt svar.

Uppgift 2. Konstruera ett polynom $p \in \mathbb{Z}_3[x]$ med grad 2, så att $p(0) = 1$, $p(1) = 2$ och $p(2) = 1$. Faktorisera sedan $p(x)$ så långt som möjligt i $\mathbb{Z}_3[x]$.

Uppgift 3. I den påhittade e-sporten *Leauge of Basement*, spelar man i lag med storlek 3. Varje spelare antar *en eller flera* av rollerna MAGIKER, HELARE, SPION, TANK och LAGLEDARE så att i ett lag återfinns exakt en av varje spelarroll. Av 9 personer ska tre lag bildas, och spelarrollerna inom varje lag ska bestämmas. På hur många sätt kan detta göras?

Svara med ett uttryck som består av summor och produkter av heltal.

Uppgift 4. Lös följande problem, och var noga med att motivera svaren!

(2p) Rita en graf som har kromatiskt tal 4, och både en Eulerkrets och en Hamiltoncykel.

(3p) Visa att en graf G som innehåller exakt en cykel, har kromatiskt tal som mest 3.

Uppgift 5. Fixera en liksidig triangel och låt X vara mängden figurer som fås då ett heltal mellan 1 och 4 står skrivet på varje hörn av triangeln. Låt gruppen $G = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ verka på X genom att r roterar triangeln 120°, och s byter alla 1 mot 2 och tvärt om. Till exempel,

$$r \cdot \begin{smallmatrix} & 4 & \\ / & & \backslash \\ 1 & - & 2 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} & 2 & \\ / & & \backslash \\ 4 & - & 1 \end{smallmatrix} \qquad \text{och} \qquad s \cdot \begin{smallmatrix} & 4 & \\ / & & \backslash \\ 1 & - & 2 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} & 4 & \\ / & & \backslash \\ 2 & - & 1 \end{smallmatrix}$$

(1p) Bestäm banan av $\begin{smallmatrix} & 4 & \\ / & & \backslash \\ 1 & - & 2 \end{smallmatrix}$ under G.

(1p) Bestäm antalet fixpunkter som rs har.

(3p) Bestäm antalet banor då G verkar på X.

Uppgift 6. Hur många permutationer $\sigma \in \mathrm{S}_8$ har egenskapen att

(1p) $\sigma(\sigma(1)) = 1$?

(4p) både $\sigma(\sigma(1)) \neq 1$ och $\sigma(\sigma(2)) \neq 2$ gäller?

Svara med ett uttryck som består av summor och produkter av heltal.