STOCKHOLMS UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Avd. Matematik,

Tentamen i
Algebra och kombinatorik
05 januari 2021 kl $09^{00} - 14^{00}$

Hjälpmedel: kursbok och anteckningar. Alla svar skall motiveras!

Uppgift 1. Låt $\pi = (1\ 4\ 6)(2\ 3\ 7)(5)$ och $\sigma = (1)(2\ 7\ 3)(4\ 6\ 5)$ vara permutationer i S_7.

(1p) Vad är $\mathrm{sgn}(\pi)$?

(2p) Beräkna $\pi\sigma$ och π^{-1}. Svara i cykelform.

(2p) Finns det $\tau \in S_7$ så att $\pi = \tau\sigma\tau^{-1}$? Motivera ditt svar.

Lösning. (a) Vi har att $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$, eftersom det är en produkt av udda cykler.
(b)
$$\pi\sigma = (1\ 4\ 6)(2\ 3\ 7)(5) \cdot (1)(2\ 7\ 3)(4\ 6\ 5) = (1\ 4)(2)(3)(5\ 6)(7).$$
$$\pi^{-1} = (1\ 6\ 4)(2\ 7\ 3)(5).$$
(c) Ja, de båda permutationerna har samma typ, $[1, 3^2]$, så det finns ett sådant τ.

Uppgift 2. Konstruera ett polynom $p \in \mathbb{Z}_3[x]$ med grad 2, så att $p(0) = 1$, $p(1) = 2$ och $p(2) = 1$. Faktorisera sedan $p(x)$ så långt som möjligt i $\mathbb{Z}_3[x]$.

Lösning. Vi kan ta polynomet $1+2x(x+1) = 1+2x+2x^2$. Detta faktoriseras som $2(x^2+x+2)$, där $x^2 + x + 2$ är moniskt. Ett kvadratiskt och moniskt polynom som är reducibelt, måste faktoriseras som $(x - a)(x - b)$, där $a, b \in \mathbb{Z}_3$. Polynomet $x^2 + x + 2$ är irreducibelt, eftersom vi ser att varken 0, 1 eller 2 är en rot till polynomet.

Uppgift 3. I den påhittade e-sporten *Leauge of Basement*, spelar man i lag med storlek 3. Varje spelare antar *en eller flera* av rollerna MAGIKER, HELARE, SPION, TANK och LAGLEDARE så att i ett lag återfinns exakt en av varje spelarroll. Av 9 personer ska tre lag bildas, och spelarrollerna inom varje lag ska bestämmas. På hur många sätt kan detta göras?
Svara med ett uttryck som består av summor och produkter av heltal.

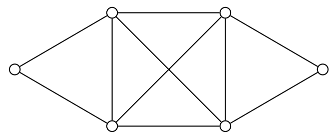
Lösning. De 9 personerna kan bilda tre lag (som inte är ordnade i någon speciell ordning), genom
$$\frac{1}{3!}\binom{9}{3,3,3} = \frac{9!}{3! \cdot (3!)^3}.$$
I varje lag, så ska de 5 spelarrollerna fördelas bland de 3 spelarna, så att varje spelare får minst en roll. Vi vill alltså räkna surjektioner från 5 roller, till tre spelare, vilket ges av $3!S(5,3)$. Stirlingtalet har värdet 25, och totalt får vi då
$$\frac{9!}{3! \cdot (3!)^3} \cdot (3! \cdot 25)^3 = \frac{9! \cdot 25^3}{3!} = 37\ 800\ 000$$
antal sätt.

Uppgift 4. Lös följande problem, och var noga med att motivera svaren!

(2p) Rita en graf som har kromatiskt tal 4, och både en Eulerkrets och en Hamiltoncykel.

(3p) Visa att en graf G som innehåller exakt en cykel, har kromatiskt tal som mest 3.

Lösning. (a) Grafen



har fyra hörn i mitten som alla är kopplade till varandra, så det kromatiska talet är minst 4. Det är lätt att sedan färglägga grafen med 4 färger. Vi kan besöka alla hörn genom att gå längs med ytterkanterna, så det finns en Hamiltoncykel. Eftersom alla hörn har jämn grad, och grafen är sammanhängande, finns en Eulerkrets.

(b) Grafen har en cykel, så börja med att färglägga den. Detta kan göras med tre färger; om det är ett jämnt antal hörn kan vi använda varannan vit, varannan svart. Om det är ett udda antal hörn i cykeln, måla ett hörn blått, och övriga varannan vit, varannan svart. Resten av grafen saknar nu cykler, så denna måste bestå av träd (som möjligen sitter fast med cykeln). Ett träd kan färgas med två färger, och vi kan välja två färger som inte är färgen på det hörn där trädet eventuellt sitter fast med cykeln.

Uppgift 5. Fixera en liksidig triangel och låt X vara mängden figurer som fås då ett heltal mellan 1 och 4 står skrivet på varje hörn av triangeln. Låt gruppen $G = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ verka på X genom att r roterar triangeln 120°, och s byter alla 1 mot 2 och tvärt om. Till exempel,

$$r \cdot \begin{smallmatrix} 4 \\ / \backslash \\ 1-2 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 2 \\ / \backslash \\ 4-1 \end{smallmatrix} \qquad \text{och} \qquad s \cdot \begin{smallmatrix} 4 \\ / \backslash \\ 1-2 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 4 \\ / \backslash \\ 2-1 \end{smallmatrix}$$

(1p) Bestäm banan av $\begin{smallmatrix} 4 \\ / \backslash \\ 1-2 \end{smallmatrix}$ under G.

(1p) Bestäm antalet fixpunkter som rs har.

(3p) Bestäm antalet banor då G verkar på X.

Lösning. Banan ges av de sex trianglarna

$$\begin{smallmatrix} 4 \\ / \backslash \\ 1-2 \end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix} 1 \\ / \backslash \\ 2-4 \end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix} 2 \\ / \backslash \\ 4-1 \end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix} 4 \\ / \backslash \\ 2-1 \end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix} 2 \\ / \backslash \\ 1-4 \end{smallmatrix}, \quad \begin{smallmatrix} 1 \\ / \backslash \\ 4-2 \end{smallmatrix}$$

Om en triangel ska vara fixerad under rs, så måste vi ha exakt inga 1 och 2, eller exakt en av varje. I det senare fallet så roteras den tredje siffran, och triangeln kan då ej vara fixpunkt. De enda fixpunkterna är då $\begin{smallmatrix} 3 \\ / \backslash \\ 3-3 \end{smallmatrix}$ och $\begin{smallmatrix} 4 \\ / \backslash \\ 4-4 \end{smallmatrix}$.

För att beräkna antalet banor använder vi Burnsides lemma, och beräknar först antalet fixpunkter för varje element i G. Kom ihåg att vi visade att g och g^{-1} alltid har samma antal fixpunkter.

- Antal fixpunkter för e: $4^3 = 64$.
- Antal fixpunkter för r och r^2: 4, alla hörn har samma färg.
- Antal fixpunkter för s: 2^3, alla hörn har färg 3 eller 4.
- Antal fixpunkter för sr och sr^2: 2, alla hörn har samma färg, 3 eller 4.

Burnside's lemma ger nu att antalet banor är

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g)| = \frac{1}{6}(64 + 2\cdot 4 + 8 + 2\cdot 2) = 14.$$

Uppgift 6. Hur många permutationer $\sigma \in \mathrm{S}_8$ har egenskapen att

(1p) $\sigma(\sigma(1)) = 1$?

(4p) både $\sigma(\sigma(1)) \neq 1$ och $\sigma(\sigma(2)) \neq 2$ gäller?

Svara med ett uttryck som består av summor och produkter av heltal.

Lösning. Om $\sigma(\sigma(1)) = 1$, så måste antingen $\sigma(1) = 1$, eller så ingår 1 i en 2-cykel, $(1\,a)$ för något $a = 2, 3, \ldots, 8$. Det finns 7! permutationer där 1 fixeras. Antalet permutationer av den andra typen är $7\cdot 6!$, eftersom vi måste välja a (7 sätt) och de övriga 6 elementen kan nu permuteras. Detta ger totalt $2\cdot 7!$ sådana permutationer.

För andra frågan använder vi oss av inklusion-exklusion. Antalet permutationer så att $\sigma(\sigma(2)) = 2$ är med samma resonemang som ovan, $2\cdot 7!$. Vi måste nu bestämma antalet permutationer där både $\sigma(\sigma(1)) = 1$ och $\sigma(\sigma(2)) = 2$. Resonemanget i första frågan säger att 1 och 2 antingen ingår i 1-cykler eller 2-cykler, så vi har följande (icke överlappande) alternativ:

- $\sigma(1) = 1$ och $\sigma(2) = 2$. Detta ger 6!.
- $\sigma(1) = 1$ och $(2\,a)$ är en 2-cykel för något $a \geq 3$. Detta ger $6\cdot 5!$.
- $\sigma(2) = 2$ och $(1\,a)$ är en 2-cykel för något $a \geq 3$. Detta ger $6\cdot 5!$.
- $(1\,a)$ och $(2\,b)$ är olika 2-cykler för några $a, b \geq 3$, $a \neq b$. Detta ger $6\cdot 5\cdot 4!$.
- $(1\,2)$ är en 2-cykel. Detta ger 6!.

Totalt får vi alltså $5\cdot 6!$ permutationer, så inklusion-exklusion leder nu till svaret

$$8! - 2\cdot 7! - 2\cdot 7! + 5\cdot 6! = 23760.$$