MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Håkan Granath
Kursansvarig: Magnus Carlson

Tentamensskrivning i
Algebra och kombinatorik
7.5 hp
27 augusti 2021

Hjälpmedel: Kursbok och föreläsningsanteckningar. 15 poäng, inklusive bonus från vårens omgång, ger garanterat betyg E. Motivera alla lösningar noggrant.

1. Betrakta $\sigma = (1\ 4\ 6\ 8\ 5)$, $\tau = (1\ 8)(2\ 7\ 9)(3\ 5)$ och $\pi = (1\ 3)(2\ 5)(4\ 6)$ som element i den symmetriska gruppen S_9.
   (a) Bestäm pariteten av σ, τ och π, dvs. bestäm för var och en av dessa permutationer, om de är jämna eller udda. 1p
   (b) Kan du hitta ett $\gamma \in S_9$ så att likheten $\gamma^2\sigma\gamma\tau\gamma = \pi$ gäller? Om det existerar ett γ, skriv ner det, och om ingen lösning existerar, bevisa att ingen lösning finns.
   (Ledtråd: använd föregående deluppgift) 2p
   (c) Kan du hitta ett $\gamma \in S_9$ så att likheten $\gamma\sigma\gamma = \tau$ gäller? Om det existerar ett γ, skriv ner det, och om ingen lösning existerar, bevisa att ingen lösning finns. 2p

2. (a) Lös ekvationen $g^{2018} = 1$ i $\mathbb{Z}_{21}$. 3p
   (b) Lös ekvationen $5g^{2107} = 75$ i $\mathbb{Z}_{205}$. 2p

3. Låt G vara en grupp och låt H och K vara två delgrupper. Definiera en relation mellan element g_1, g_2 i G på följande sätt:
$$g_1 R g_2 \iff \text{det existerar } h \in H \text{ och } k \in K \text{ så att } hg_1k = g_2.$$
   (a) Bevisa att R är en ekvivalensrelation 3p
   (**Det är viktigt att du tydligt motiverar de påståenden du gör i denna deluppgift**)
   (b) Låt nu $G = S_4$ vara den symmetriska gruppen på 4 element och låt H vara delgruppen genererad av $(1\ 2\ 3)$ och låt K delgruppen genererad av $(2\ 3\ 4)$ och låt G/R vara ekvivalensklasserna som vi får om vi använder den ovan definierade relationen. Finn ekvivalensklassen innehållandes identitetselementet av G. Är ekvivalensklassen innehållandes identitetselementet en delgrupp av G? 2p

4. (a) För var och en av fallen nedan, avgör huruvida det finns en graf med sex hörn som har valenserna
   - (2,3,4,4,4,5)
   - (1,2,2,2,2,4)
   - (1,2,2,4,4,5)

   Om en graf med de givna valenserna existerar, konstruera grafen. Om en graf med de angivna valenserna ej existerar, bevisa detta. 3p
   (b) En graf med åtta hörn har valenserna $(1, 2, 2, 3, 5, 6, 6, x)$ där vi antar att x är ett heltal som uppfyller $1 \leq x \leq 5$. Vilka värden på x är möjliga i detta intervall? Bevisa dina påståenden, så om du hävdar att en graf med ett specifikt x existerar, konstruera ett exempel, och om du hävdar att ett visst värde på x inte går, bevisa detta. 2p

5. Antag att du har 1000 urnor som alla är lagda på en rad. Du skall nu lägga in 811 (identiska) bollar i dessa urnor och ingen urna får innehålla fler än en boll. Måste det finnas en grupp av åtminstone 5 stycken på varandra direkt efterföljande urnor som alla innehåller en boll? 5p

6. (a) Hur många omordningar av bokstäverna i ordet "UNDULATUNDRAN" innehåller inte delordet ULURU? 2p

   (b) Hur många omordningar av bokstäverna i ordet "UNDULATUNDRAN" innehåller delordet DUN exakt en gång, men innehåller inte delorden ULURU eller RATA? 3p
   (**Dina svar får innehålla kombinatorisk standardnotation från kursen, som ej behöver beräknas eller förenklas, men måste motiveras tydligt.**)

Lycka till!